Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика»

С.К. Соболев, В.Я. Томашпольский

Векторная алгебра

Электронное учебное издание

**Методические указания к решению задач
по курсу "Аналитическая геометрия"**

Москва

УДК: 512+514.12

Рецензент: Приказчиков Данила Александрович

Соболев С.К., Томашпольский В.Я. Векторная алгебра. Методические указания к решению задач по курсу "Аналитическая геометрия" – М., МГТУ им. Н.Э. Баумана, илл. 24.

Изложены основы теории по векторной алгебре: линейные операции над векторами, базис и координаты, скалярное, векторное и смешанное произведения, определитель Грама, приложения к геометрии и механике. Разобрано большое количество примеров как стандартных, так и повышенной сложности. Содержит задачи для самостоятельного решения, снабженные ответами и указаниями.

Для студентов, изучающих и применяющих векторную алгебру.

Рекомендовано Учебно-методической комиссией факультета "Фундаментальные науки" МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Оглавление

Введение

Векторы имеют широкое применение в различных разделах математики, например, в элементарной, аналитической и дифференциальной геометрии, в теории поля. Векторная алгебра широко используется во многих разделах физики и механики, в кристаллографии, геодезии. Без векторов немыслима и не только классическая математика, но и многие другие науки.

В данном пособии особый акцент делается на применении векторной алгебры, на решении задач как стандартных, так и повышенной сложности. В каждой главе приводится краткие, но исчерпывающие теоретические сведения и разбираются разнообразные примеры (всего более 30). Конец решения каждого примера обозначен черным квадратиком ■. В пособии рассматриваются и ряд дополнительных тем, например, барицентрические координаты, центр масс, определитель Грама и его связь с векторным и смешанным произведениями. В конце каждой главы дано большое количество задач для самостоятельного решения, к которым имеются ответы и указания. Пособие будет полезно всем студентам, которые хотят углубить свои познания и навыки в векторной алгебре, но в первую очередь – студентам факультета ФН.

1. Линейные операции над векторами. Базис и координаты.

Краткие теоретические сведения. Напомним основные понятия векторной алгебры. ***Геометрический вектор*** (или просто ***вектор***) – это отрезок AB, на котором задано направление, например, от A к B, и обозначаемый $\overline{AB}$. Точки A и B называются соответственно ***началом*** и ***концом*** вектора $\overline{AB}$. ***Длиной*** вектора $\overline{AB}$ называется расстояние между его началом и концом, она обозначается $\left|\overline{AB}\right|$. Два вектора называются ***равными***, если они одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

1.1. Лемма о равенстве двух векторов. *Для любых четырех точек пространства A, B, C и D* $\overline{AB}=\overline{CD}$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{AC}=\overline{BD}$.

1.2. Свойство равенства векторов. *Отношение равенства векторов обладает свойствами:*

(а) *если* $\overline{AB}=\overline{CD}$, *то и* $\overline{CD}=\overline{AB}$ *(симметричность);*

(б) *если* $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{CD}=\overline{EF}$, то $\overline{AB}=\overline{EF}$ *(транзитивность).*

Вектор, положение начала которого не имеет значения, обозначается маленькой латинской буквой полужирным курсивом: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{d}_2$ и т.д. Определение ***суммы*** векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: от произвольной точки A пространства отложить первый вектор $\boldsymbol{a}=\overline{AB}$, от полученной точки B отложить второй вектор $\boldsymbol{b}=\overline{BC}$, тогда, по определению, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \underset{def}{=} \overline{AC}$. Это правило называется ***правилом треугольника*** сложения векторов и выражается формулой: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

1.3 Замечание. Вышеприведенное определение правила сложения векторов ***корректно***, т.е. оно *не зависит от выбора точки A*. Это значит, что если вместо точки A взять другую точку A_1, то результат будет тот же:

Если $\overline{AB}=\overline{A_1B_1}$ *и* $\overline{BC}=\overline{B_1C_1}$, *то и* $\overline{AC}=\overline{A_1C_1}$.

(докажите это самостоятельно с помощью леммы 1.1 и свойства 1.2).

1.4. ***Нулевым вектором*** называется вектор, начало и конец которого совпадают: $\boldsymbol{0}=\overline{AA}=\overline{BB}=\overline{CC}=\ldots$. Для произвольного вектора $\boldsymbol{a}=\overline{AB}$ вектор $\overline{BA}$ называется ***противоположным***, он обозначается $-\boldsymbol{a}$. ***Разностью*** векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. Можно доказать, что $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$. ***Правило параллелограмма*** сложения и вычитания векторов: векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ отложить от одного начала: $\boldsymbol{a}=\overline{AD}$, $\boldsymbol{b}=\overline{AB}$ и достроить до параллелограмма: $ABCD$ (см. рис. 1), тогда $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overline{AC}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overline{BD}$.

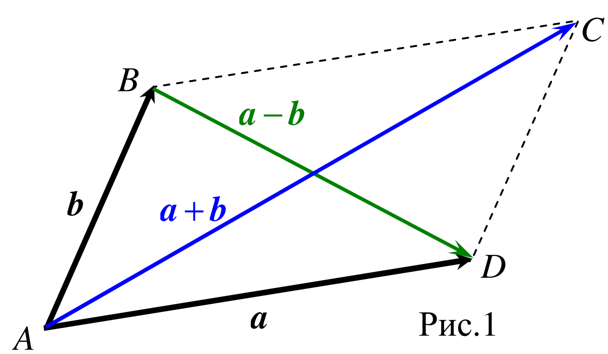


Рис.1

1.5. ***Произведение числа (скаляра)*** $\lambda \in \mathbb{R}$ ***на вектор*** $\boldsymbol{a}$ есть вектор $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, длина которого $|\boldsymbol{b}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$, а направление определяется так: если $\lambda=0$ или $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, то и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, а если $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, то вектор $\boldsymbol{b}$ одинаково направлен с вектором $\boldsymbol{a}$ (символически $\boldsymbol{b}\uparrow\uparrow\boldsymbol{a}$) при $\lambda>0$, и противоположно направлен (символически $\boldsymbol{b}\downarrow\uparrow\boldsymbol{a}$) при $\lambda<0$.

1.6. Свойства операций сложения векторов и умножения их на числа.

Для любых векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ и чисел $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$:

(а) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (коммутативность);

(б) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (ассоциативность);

(в) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$; (г) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$;

(д) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$; (е) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ (дистрибутивность);

(ж) $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$; (з) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

1.7. Благодаря свойствам (а) и (б) можно складывать любое количество векторов в произвольном порядке. ***Правило многоугольника*** сложения нескольких векторов $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$: от произвольной точки A_0 отложим первый вектор $\boldsymbol{a}_1=\overline{A_0A_1}$, от его конца A_1 отложим второй вектор $\boldsymbol{a}_2=\overline{A_1A_2}$, и.т.д., и от конца A_{n-1} предпоследнего вектора отложим последний вектор $\boldsymbol{a}_n=\overline{A_{n-1}A_n}$. Тогда $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_n=\overline{A_0A_n}$ (см. Рис.2). Таким образом, например, не глядя на чертеж, легко найти сумму:

$$\overline{CM}+\overline{AC}+\overline{DE}+\overline{MD}=\overline{AC}+\overline{CM}+\overline{MD}+\overline{DE}=\overline{AE}.$$

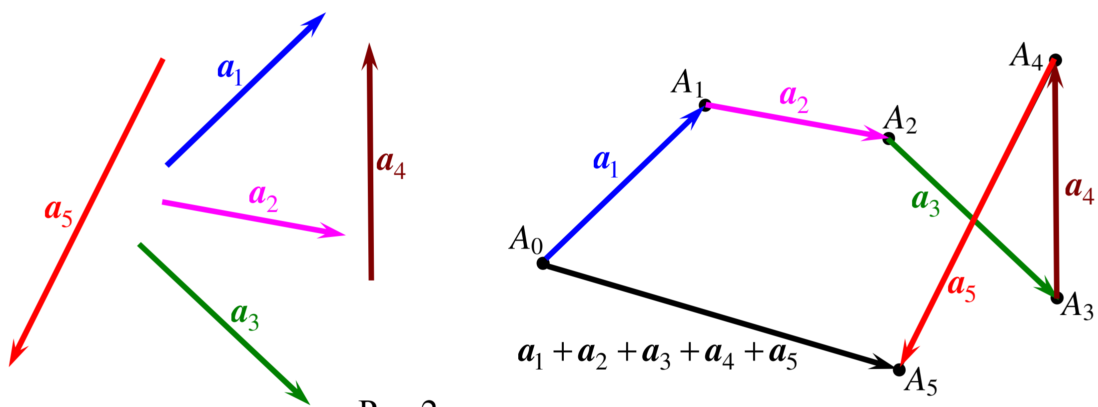


Рис.2

1.8. Условимся считать нулевой вектор параллельным любой прямой и любой плоскости. Совокупность векторов называется ***коллинеарной*** (***компланарной***), если все они параллельны некоторой прямой (соответственно плоскости). Это определение равносильно следующему: *совокупность векторов является коллинеарной (компланарной) тогда и только тогда, когда все эти векторы, будучи отложенными от общего начала, лежат на одной прямой (соответственно в одной плоскости)*. Поэтому два вектора всегда компланарны.

1.9. ***Линейной комбинацией*** векторов $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ называется сумма произведений этих векторов на произвольные числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n\in\mathbb{R}$; её результат – тоже некоторый вектор: $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}$. Например $3\boldsymbol{a}+\frac{2}{5}\boldsymbol{b}-\sqrt{7}\boldsymbol{c}$ – одна из линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Линейная комбинация называется ***тривиальной***, если все её коэффициенты нулевые. Понятно, что тривиальная комбинация любых векторов дает нулевой вектор. Совокупность векторов $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ называется ***линейно зависимой*** (или просто ***зависимой***), если существует их нетривиальная линейная комбинация, дающая нулевой вектор, т.е. когда найдутся числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n\in\mathbb{R}$, не равные одновременно нулю и такие, что $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$. Совокупность векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называется ***линейно независимой*** (или просто ***независимой***), если она не является зависимой, т.е. если **только** тривиальная линейная комбинация этих векторов (и больше никакая!) дает нулевой вектор, иными словами, когда равенство $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ обязательно влечет $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Например, для любых трех точек A, B и C векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ линейно зависимы, т.к. их линейная комбинация с коэффициентами 1, -1 и 1 равна нулевому вектору: $\overline{AB} - \overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AA} = \boldsymbol{0}$.

1.10. Общий критерий[1] линейной зависимости нескольких векторов: *совокупность векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из них есть линейная комбинация остальных.* Следовательно, *совокупность векторов линейно независима тогда и только тогда, когда ни один из них не является линейной комбинацией остальных.*

Критерии линейной зависимости двух, трех и четырех векторов: *Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны. Четыре или более геометрических вектора всегда линейно зависимы.*

1.11. Упорядоченная совокупность векторов плоскости (или пространства) называется ***базисом***, если эти векторы, во-первых, линейно независимы, а, во-вторых, через них можно выразить всякий вектор плоскости (пространства). *Коэффициенты разложение вектора по базису определены однозначно*, они называются ***координатами*** вектора в данном базисе. На плоскости базис образуют любые два неколлинеарных вектора, а в пространстве – любые три некомпланарных вектора. Базис, состоящий из трех единичных попарно перпендикулярных векторов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, называется ***ортонормированным***. Координаты вектора в заданном базисе мы будем указывать в круглых или фигурных скобках, а именно, запись $\boldsymbol{a}\{x;\, y;\, z\}$ означает, что $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. При сложении векторов и умножении их на числа с их координатами выполняются те же самые операции.

1.12. Пусть некоторая точка O принята за начало отсчета. ***Радиусом-вектором*** точки A называется вектор $\overline{OA}$. Если точка C делит отрезок AB в заданном отношении: $AC : CB = \alpha : \beta$, то $\overline{OC} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overline{OA} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overline{OB}$. В частности, радиус-вектор середины отрезка AB есть $\frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right)$.

1.13. ***Декартова система координат*** на плоскости (в пространстве) состоит из точки O (начала отсчета) и базиса в этой плоскости (пространства) т.е. двух неколлинеарных векторов этой плоскости (соответственно трех некомпланарных векторов). Напомним, что ***числовой осью*** (или ***координатной прямой***) называется прямая, на которой заданы начало отсчета, направление и масштаб. Каждой точке P координатной прямой однозначно соответствует некоторое вещественное число $x_P \in \mathbb{R}$ и наоборот. Координатные прямые с

[1] ***Критерий*** – это синоним для словосочетания «необходимое и достаточное условие».

началом отсчета в точке O, сонаправленные соответствующим базисным векторам $\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c}$ и с единицей масштаба, равной длине этих векторов, называются координатными осями OX, OY и OZ, а также осями ***абсцисс***, ***ординат*** и ***аппликат*** соответственно. ***Координатами точки*** M в декартовой системе координат называются координаты её радиус вектора $\overline{OM}$ в базисе $\{\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c}\}$, т.е. запись $M(x;\,y;\,z\}$ означает, что $\overline{OM}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+x\boldsymbol{c}$. Если базис ортонормированный $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, то соответствующая декартова система координат называется ***прямоугольной***. В общем случае любая координата точки M есть проекция точки M на соответствующую координатную ось параллельно плоскости, содержащей две другие координатные оси (см. **п. 1.16** далее). В частности, в случае прямоугольной системы координат это прямоугольные (ортогональные) проекции точки M на эти оси.

1.14. Если точки A и B имеют координаты $A(x_A;y_A;z_A)$ и $B(x_B;y_B;z_B)$ то вектор $\overline{AB}$ имеет координаты $\overline{AB}(x_B-x_A;\,y_B-y_A;\,z_B-z_A)$.

Координаты точки C, делящей отрезок AB в заданном отношении: $AC:CB=\alpha:\beta$, выражаются через координаты точек A и B формулами:

$$x_C=\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}x_A+\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}x_B,\;\; y_C=\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}y_A+\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}y_B,\;\; z_C=\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}z_A+\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}z_B.$$

Расстояние между точками A и B в **прямоугольной** системе координат выражается формулой: $|AB|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$. Далее, по умолчанию, система координат всегда прямоугольная.

1.15. Пусть в пространстве даны прямая ℓ и не параллельная ей плоскость π. ***Проекцией*** произвольной точки A на плоскость π ***параллельно прямой*** ℓ называется точка A_1 пересечения этой плоскости с прямой ℓ_1, проходящей через точку A параллельно[2] прямой ℓ. ***Проекцией*** точки A на прямую ℓ ***параллельно плоскости*** π называется точка A_2 пересечения этой прямой с плоскостью π_1, проходящей через точку A параллельно плоскости π. (см. Рис. 3). ***Проекция фигуры Ф*** на плоскость (прямую) состоит из проекций всех точек фигуры $Ф$ на эту плоскость (прямую). На. рис. 4 изображена линия L_1 – проекция кривой L на плоскость π параллельно прямой ℓ. Проекция точки или фигуры на плоскость параллельно прямой, перпендикулярной этой плоскости, называется ***прямоугольной*** или ***ортогональной.*** Параллельная (в частности, ортогональная) проекция на плоскость

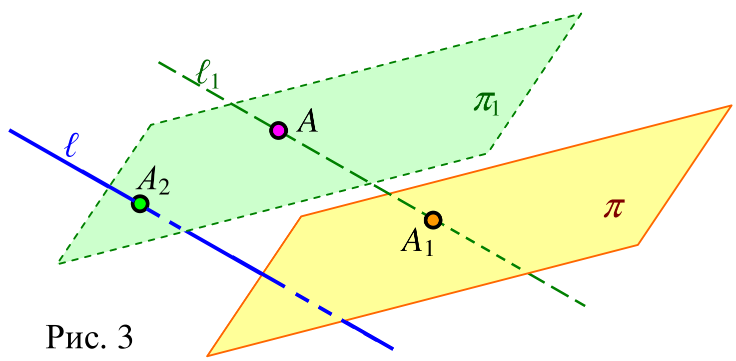


Рис. 3

[2] В этом и в двух следующих пунктах две совпадающие прямые или плоскости тоже считаются параллельными.

широко используется для изображения пространственных фигур на плоскости. Отметим свойства параллельных (и, в частности, ортогональных) проекций на плоскость, известные их курса школьной геометрии:

(а) проекция прямой есть прямая (или точка);

(б) проекции параллельных прямых тоже параллельны (или совпадают);

(в) длины проекций отрезков, расположенных на одной прямой пропорциональны длинам самих отрезков.

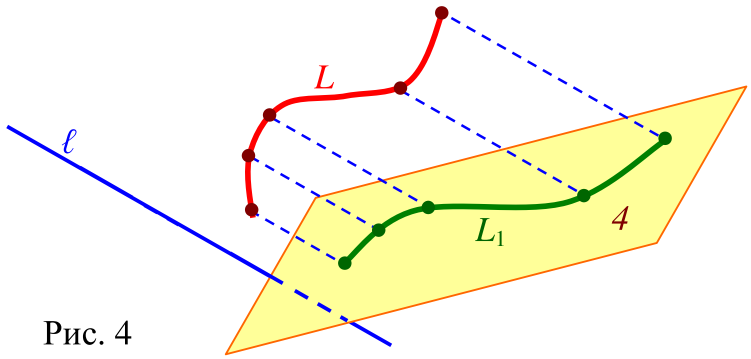


Рис. 4

1.16. Проекцией вектора $\overline{AB}$ на плоскость ***на плоскость π параллельно прямой ℓ*** называется вектор $\overline{A_1B_1}$, где A_1 и B_1 – проекции точек A и B соответственно на плоскость π параллельно прямой ℓ, она обозначается $\overline{A_1B_1} = \mathrm{Pr}_\pi^\ell\left(\overline{AB}\right)$. Аналогично определяется проекция вектора $\overline{AB}$ на ***прямую ℓ параллельно плоскости π*** – это вектор $\overline{A_2B_2}$, где A_2 и B_2 – проекции точек A и B соответственно на прямую ℓ параллельно плоскости π, она обозначается $\overline{A_1B_1} = \mathrm{Pr}_\ell^\pi\left(\overline{AB}\right)$. (см. Рис. 5).

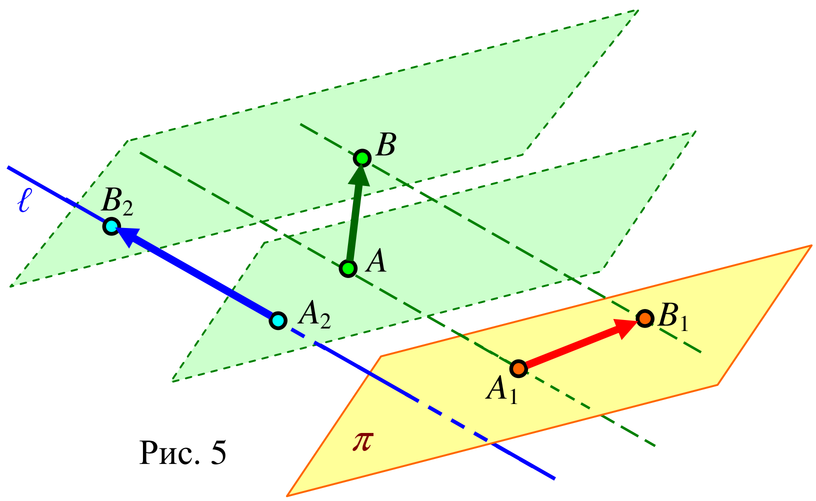


Рис. 5

Свойства параллельной проекции вектора на плоскость:

(а) Если $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$, $\pi_1 \parallel \pi_2$ и $\ell_1 \parallel \ell_2$, то $\mathrm{Pr}_{\pi_1}^{\ell_1}\left(\overline{A_1B_1}\right) = \mathrm{Pr}_{\pi_2}^{\ell_2}\left(\overline{A_2B_2}\right)$;

(б) свойство **линейности**: для любых векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ и чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Pr}_\pi^l(\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2) = \lambda_1 \cdot \mathrm{Pr}_\pi^l(\boldsymbol{a}_1) + \lambda_2 \cdot \mathrm{Pr}_\pi^l(\boldsymbol{a}_2).$$

Аналогичные свойства верны и для проекции вектора на прямую.

(в) Если прямая ℓ и плоскость π не параллельны, то для любого вектора $\boldsymbol{a}$ справедливо представление:

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{Pr}_\ell^\pi(\boldsymbol{a}) + \mathrm{Pr}_\pi^\ell(\boldsymbol{a}).$$

Это представление называется ***разложением вектора a по прямой ℓ и плоскости π***.

Чтобы найти проекцию вектора $\boldsymbol{b}$ на плоскость π параллельно прямой ℓ, или проекцию вектора $\boldsymbol{b}$ на прямую ℓ параллельно плоскости π надо выбрать в плоскости π два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, выбрать на прямой ℓ ненулевой вектор $\boldsymbol{a}_3$ и разложить вектор $\boldsymbol{b}$ по базису $\{\boldsymbol{a}_1;\boldsymbol{a}_2;\boldsymbol{a}_3\}$: $\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3$. Тогда $\mathrm{Pr}_{\pi}^{\ell}(\boldsymbol{b})=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2$, $\mathrm{Pr}_{\ell}^{\pi}(\boldsymbol{b})=\lambda_3\boldsymbol{a}_3$.

1.17. Пусть в пространстве задан ненулевой вектор $\boldsymbol{a}$ и непараллельная ему плоскость π. ***Проекцией вектора b на направление вектора a*** (параллельно плоскости π) называется **число** $\pm|\boldsymbol{b}_1|$, где вектор $\boldsymbol{b}_1=\mathrm{Pr}_{\ell}^{\pi}(\boldsymbol{b})$ – проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на прямую ℓ параллельно плоскости π (где ℓ – любая прямая, параллельная вектору $\boldsymbol{a}$), а знак + или – выбирается в зависимости от того, совпадает или нет направление вектора $\boldsymbol{b}_1$ с направлением вектора $\boldsymbol{a}$.

Проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{a}$ (параллельно плоскости π) обозначается $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}^{\pi}(\boldsymbol{b})$, она обладает свойствами:

(а) Если векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ одинаково направлены: $\boldsymbol{a}_1\uparrow\uparrow\boldsymbol{a}_2$, то $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}_1}^{\pi}(\boldsymbol{b})=\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}_2}^{\pi}(\boldsymbol{b})$, а если векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ противоположно направлены: $\boldsymbol{a}_1\uparrow\downarrow\boldsymbol{a}_2$, то $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}_1}^{\pi}(\boldsymbol{b})=-\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}_2}^{\pi}(\boldsymbol{b})$;

(б) свойство **линейности**: для любых векторов $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ и чисел $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}^{\pi}(\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\lambda_2\boldsymbol{b}_2)=\lambda_1\cdot\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}^{\pi}(\boldsymbol{b}_1)+\lambda_2\cdot\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}^{\pi}(\boldsymbol{b}_2).$$

Чтобы найти проекцию вектора $\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{a}$ параллельно плоскости π (не параллельной вектору $\boldsymbol{a}$), надо в плоскости π выбрать два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{c}_1$ и $\boldsymbol{c}_2$, разложить вектор $\boldsymbol{b}$ по базису $\{\boldsymbol{a};\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\}$: $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{c}_1+\mu_2\boldsymbol{c}_2$, тогда проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{a}$ (параллельно плоскости π) равна:

$$\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}^{\pi}(\boldsymbol{b})=\lambda\cdot|\boldsymbol{a}|.$$

Пример 1. Даны произвольные векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{c}=-4\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ линейно зависимы.

Решение. Построим плоскость π на векторах $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, отложенных от общего начала. Тогда векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ лежат в той же плоскости π и поэтому компланарны, а значит, и линейно зависимы. Можно найти и конкретную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, дающую вектор $\boldsymbol{c}$. Пусть

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\Leftrightarrow\lambda(2\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{q})+\mu(3\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})=-4\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2\lambda+3\mu)\boldsymbol{p}+(5\lambda-\mu)\boldsymbol{q}=-4\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}.$$

Для наших целей достаточно найти λ и μ, удовлетворяющих системе: $\begin{cases}2\lambda+3\mu=-4,\\ 5\lambda-\mu=1.\end{cases}$ Решив её, находим: $\lambda=-\dfrac{1}{17},\mu=-\dfrac{22}{17}$. Итак, $\boldsymbol{c}=-\dfrac{1}{17}\boldsymbol{a}-\dfrac{22}{17}\boldsymbol{b}$, это и значит, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ линейно зависимы. ■

Пример 2. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, и $\boldsymbol{c}$ имеют в некотором исходном базисе координаты $\boldsymbol{a}(-1;2;3), \boldsymbol{b}(3;1;4), \boldsymbol{c}(5;3;2)$. Доказать, что эти векторы тоже образуют базис, и разложить по новому базису вектор $\boldsymbol{d}(11;16;9)$.

Решение. Докажем, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, и $\boldsymbol{c}$ линейно независимы. Допустим, что какая-то линейная комбинация этих векторов даёт нулевой вектор: $\alpha\cdot\boldsymbol{a}+\beta\cdot\boldsymbol{b}+\gamma\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. Записав координаты векторов по столбцам, получим:

$$\alpha\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha+3\beta+5\gamma=0,\\ 2\alpha+\beta+3\gamma=0,\\ 3\alpha+4\beta+2\gamma=0.\end{cases}$$

Для решения последней системы применим формулы Крамера. Главный определитель равен

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1&3&5\\2&1&3\\3&4&2\end{vmatrix}=-2+27+40-15-12+12=50\neq0,$$

а все вспомогательные определители, очевидно, равны нулю (у них один столбец полностью нулевой). Поэтому решение системы $\alpha=\beta=\gamma=0$. Это и значит, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, и $\boldsymbol{c}$ линейно независимы, и поэтому образуют базис в пространстве. Далее нам надо найти коэффициенты x, y и z разложения $x\cdot\boldsymbol{a}+y\cdot\boldsymbol{b}+z\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$:

$$x\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\16\\9\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+3y+5z=11,\\ 2x+y+3z=16,\\ 3x+4y+2z=9.\end{cases}$$

Решив последнюю систему, например, методом Крамера, получим:
$x=3,\ y=-2,\ z=4$. **Ответ:** $\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$. ■

Пример 3. Выразить радиус вектор точки M пересечения медиан треугольника ABC через радиус-векторы его вершин.

Решение. Как известно, точка M лежит на медиане AD и делит её в отношении $AM:MD=2:1$, и D – середина отрезка BC. Тогда, если O – начало отсчета (не важно, где оно находится!), то $\overline{OD}=\frac{1}{2}(\overline{OB}+\overline{OC})$, и

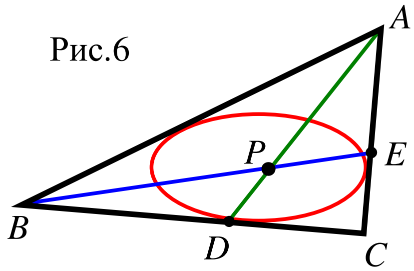
$$\overline{OM}=\tfrac{1}{3}\overline{OA}+\tfrac{2}{3}\overline{OD}=\tfrac{1}{3}\overline{OA}+\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2}\overline{OB}+\tfrac{1}{2}\overline{OC}\right)=\tfrac{1}{3}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right).$$ ■

Пример 4. Считая известными длины сторон треугольника ABC: $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, выразить радиус-вектор центра P его вписанной окружности через радиус-векторы его вершин.

Решение. Как известно, во-первых, центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис, а во-вторых, биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Пусть P – точка пересечения биссектрис AD и BE треугольника ABC (см. Рис. 6.; треугольник может лежать в плоскости, не параллельной плоскости чертежа, и поэтому вписанная окружность выглядит как эллипс). Тогда

$BD : DC = AB : AC = c : b$. Следовательно, $\overline{OD} = \frac{b}{b+c}\overline{OB} + \frac{c}{b+c}\overline{OB}$. Далее, положим: $\frac{BD}{c} = \frac{CD}{b} = x$, тогда $BD = cx$, $DC = bx$ и $cx + bx = BD + DC = BC = a$, откуда $x = \frac{a}{b+c} \Rightarrow DB = cx = \frac{ac}{b+c}$. Аналогично, в треугольнике *ABD* биссектриса *BP* делит сторону *AD* на части $AP : PD = AB : BD = c : \frac{ac}{b+c} = \frac{b+c}{a} = (b+c) : a$. Поэтому

Рис.6



$$\overline{OP} = \frac{a}{a+b+c}\overline{OA} + \frac{b+c}{a+b+c}\overline{OD} =$$
$$= \frac{a}{a+b+c}\overline{OA} + \frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\overline{OB} + \frac{c}{b+c}\overline{OB}\right) =$$
$$= \frac{a}{a+b+c}\overline{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overline{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overline{OC}. \blacksquare$$

Пример 5. В треугольнике *ABC* известны координаты его вершин: $A(2;3;-1)$, $B(1;5;1)$, $C(4;7;-5)$ Найти координаты центра вписанной окружности и длину медианы *BD*.

Решение. Сначала найдем длины сторон треугольника:

$$a = |BC| = \sqrt{(1-4)^2 + (5-7)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{9+4+36} = 7,$$
$$b = |AC| = \sqrt{4+16+16} = 6,\ c = |AB| = \sqrt{1+4+4} = 3.$$

Следовательно, радиус вектор центра вписанной окружности выражается через радиус-векторы вершин треугольника так:

$$\overline{OP} = \frac{a}{a+b+c}\overline{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overline{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overline{OC} =$$
$$= \tfrac{7}{16}\overline{OA} + \tfrac{6}{16}\overline{OB} + \tfrac{3}{16}\overline{OC}.$$

Аналогичная формула справедлива и для каждой из трёх координат точки *P*:

$$x_P = \tfrac{1}{16}(7x_A + 6x_B + 3x_C) = \tfrac{1}{16}(7\cdot 2 + 6\cdot 1 + 3\cdot 4) = \tfrac{1}{16}\cdot 32 = 2,$$
$$y_P = \tfrac{1}{16}(7y_A + 6y_B + 3y_C) = \tfrac{1}{16}(7\cdot 3 + 6\cdot 5 + 3\cdot 7) = \tfrac{1}{16}\cdot 72 = \tfrac{9}{2},$$
$$z_P = \tfrac{1}{16}(7z_A + 6z_B + 3z_C) = \tfrac{1}{16}(7\cdot(-1) + 6\cdot 1 + 3\cdot(-5)) = -1.$$

Следовательно, $P\left(2;\tfrac{9}{2};-1\right)$. Второй конец медианы *BD* – точка *D*– является серединой отрезка *AC*, её координаты:

$$x_D = \tfrac{1}{2}(x_A + x_C) = \tfrac{1}{2}(2+4) = 3,\ y_D = \tfrac{1}{2}(y_A + y_C) = \tfrac{1}{2}(3+7) = 5,$$
$$z_D = \tfrac{1}{2}(z_A + z_C) = \tfrac{1}{2}(-1-5) = -3 \Rightarrow D(3;5;-3).$$

Длина медианы *AD* равна:

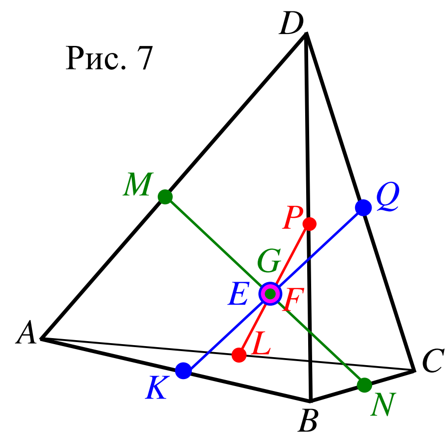
$$|AD| = \sqrt{(2-3)^2 + (3-5)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3.$$

Ответ: $P(2;\frac{9}{2};-1)$, $AD=3$. ■

Пример 6. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер произвольного тетраэдра[3], пересекаются в одной точке и делятся ею пополам (эта точка называется ***центроидом***[4] тетраэдра).

Решение. Пусть в тетраэдре $ABCD$ середины рёбер AB, AC, AD, BC, BD и CD – это точки K, L, M, N, P, и Q соответственно (см. Рис. 7). Далее, пусть E – середина отрезка KQ (соединяющего середины рёбер AB и CD), F – отрезка LP (соединяющего середины рёбер AC и BD), и, наконец, G – середина отрезка MN (соединяющего середины рёбер AD и BC). Нам надо доказать, что точки E, F и G совпадают. Для этого достаточно показать равенство их радиус-векторов $\overline{OE}$, $\overline{OF}$ и $\overline{OG}$, где O – произвольная точка отсчета.

Рис. 7



Обозначим через $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ радиус-векторы вершин A, B, C и D соответственно, и выразим через эти четыре вектора радиус-вектор точки E:

$$\overline{OE}=\tfrac{1}{2}\left(\overline{OK}+\overline{OQ}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OB}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\overline{OC}+\overline{OD}\right)\right)=\tfrac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}).$$

Аналогично,

$$\overline{OF}=\tfrac{1}{2}\left(\overline{OL}+\overline{OP}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OC}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\overline{OB}+\overline{OD}\right)\right)=\tfrac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}) \text{ и}$$

$$\overline{OG}=\tfrac{1}{2}\left(\overline{OM}+\overline{ON}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OD}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\overline{OB}+\overline{OC}\right)\right)=\tfrac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

Итак, мы получили $\overline{OE}=\overline{OF}=\overline{OG}$, следовательно, точки E, F и G совпадают. ■

Замечание. Если в примерах 3 и 4 точка отсчета O лежит в плоскости треугольника ABC, то найденные выражения радиус-векторов точки пересечения медиан и точки пересечения биссектрис через радиусы векторы вершин треугольника не являются единственными. Например, если точка O совпадает с точкой C, то $\overline{OM}=\frac{1}{3}\left(\overline{OA}+\overline{OB}\right)$, что не противоречит полученному результату, т.к. вектор $\overline{OC}$ в этом случае нулевой. Аналогично, четыре вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ в примере 4 линейно зависимы (при любом положении точки O), и поэтому выражение вектора $\overline{OE}$ через эти векторы не однозначно. Однако, найденные в примерах 3, 4 и 6 выражения отличаются тем, что они **не зависят от положения точки отсчета *O***.

Теперь решим задачи на использовании **единственности** разложения вектора по базису.

---

[3] ***Тетраэдром*** называется многогранник, ограниченный четырьмя треугольными гранями, т.е. это треугольная пирамида.

[4] Точное определение **центроида** геометрической фигуры см. далее на стр. 18.

Пример 7. В параллелограмме $ABCD$ точки E и L являются серединами сторон AB и BC соответственно, точки K и F расположены на сторонах AD CD и делят их в отношении $AK:KD=2:1,\ CF:FD=3:1$. Отрезки EF и KL пересекаются в точке M. Найти отношения $EM:MF$ и $KM:ML$.

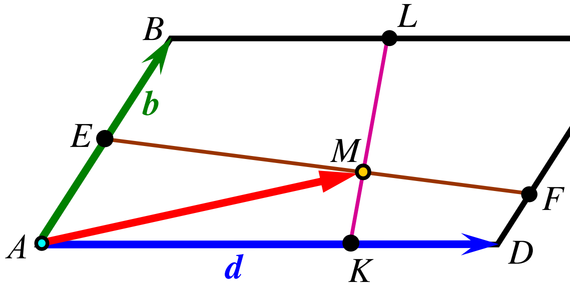


Рис. 8

Решение. Возьмем векторы $\boldsymbol{b}=\overline{AB}$ и $\boldsymbol{d}=\overline{AD}$ в качестве базиса на плоскости, и сначала разложим по этому базису векторы $\overline{EF}$ и $\overline{KL}$:

$$\overline{EF}=\overline{EA}+\overline{AD}+\overline{DF}=-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}+\tfrac{1}{4}\boldsymbol{b}=-\tfrac{1}{4}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d};$$

$$\overline{KL}=\overline{KA}+\overline{AB}+\overline{BL}=-\tfrac{2}{3}\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}-\tfrac{1}{6}\boldsymbol{d}.$$

Обозначим $x=\dfrac{EM}{EF},\ y=\dfrac{KM}{KL}$ (см. Рис. 8). Понятно, что $0<x<1,\ 0<y<1$ и искомые отношения равны $EM:MF=x:(1-x),\ KM:ML=y:(1-y)$.

Теперь разложим вектор $\overline{AM}$ по базису $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}\}$ двумя способами:

(1) $\overline{AM}=\overline{AE}+\overline{EM}=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+x\overline{EF}=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+x\left(-\tfrac{1}{4}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}\right)=\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}x\right)\boldsymbol{b}+x\boldsymbol{d};$

(2) $\overline{AM}=\overline{AK}+\overline{KM}=\tfrac{2}{3}\boldsymbol{d}+y\overline{KL}=\tfrac{2}{3}\boldsymbol{d}+y\left(\boldsymbol{b}-\tfrac{1}{6}\boldsymbol{d}\right)=y\boldsymbol{b}+\left(\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{6}y\right)\boldsymbol{d}.$

В силу единственности разложения вектора по базису, коэффициенты при $\boldsymbol{b}$ и при $\boldsymbol{d}$ в обоих разложения должны быть равны:

$$\begin{cases}\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}x=y\\ x=\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{6}y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+4y=2,\\ 6x+y=4.\end{cases}$$

Решив эту систему (например, по формулам Крамера), находим

$$\Delta=-23,\ \Delta_x=-14,\ \Delta_y=-8\Rightarrow x=\frac{14}{23},\ y=\frac{8}{23}.$$

Отсюда, получаем искомые отношения:

$$EM:MF=x:(1-x)=\tfrac{14}{23}:\tfrac{9}{23}=14:9;$$

$$KM:ML=y:(1-y)=\tfrac{8}{23}:\tfrac{15}{23}=8:15.\ \blacksquare$$

Пример 8. В тетраэдре $ABCD$ точка E – середина ребра AD, точки F и K делят ребро CD на три равные части: $CF=FK=KD$, а точка L делит ребро AB в отношении $AL:LB=1:3$. Отрезок KL пересекает плоскость BEF в точке M. Найти отношение $KM:ML$.

Решение. Рассмотрим некомпланарные векторы $\boldsymbol{a}=\overline{DA},\ \boldsymbol{b}=\overline{DB}$ и $\boldsymbol{c}=\overline{DC}$ как базис в пространстве (см. Рис. 9). Разложим вектор $\overline{KL}$ по этому базису:

$$\overline{KL} = \overline{KD} + \overline{DB} + \overline{BL} = -\tfrac{1}{3}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} + \tfrac{3}{4}\overline{BA} = -\tfrac{1}{3}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} + \tfrac{3}{4}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \tfrac{3}{4}\boldsymbol{a} + \tfrac{1}{4}\boldsymbol{b} - \tfrac{1}{3}\boldsymbol{c}.$$

Обозначим, как и в предыдущем примере, $x = \dfrac{KM}{KL}$. Сначала разложим вектор $\overline{DM}$ по базису $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$:

1) $\overline{DM} = \overline{DK} + \overline{KM} = \tfrac{1}{3}\boldsymbol{c} + x\cdot\overline{KL} = \tfrac{1}{3}\boldsymbol{c} + x\cdot\left(\tfrac{3}{4}\boldsymbol{a} + \tfrac{1}{4}\boldsymbol{b} - \tfrac{1}{3}\boldsymbol{c}\right) =$

$= \tfrac{3}{4}x\cdot\boldsymbol{a} + \tfrac{1}{4}x\cdot\boldsymbol{b} + \tfrac{1}{3}(1-x)\cdot\boldsymbol{c};$

{Но если использовать тот же прием, что и в примере 7, то надо будет приравнять коэффициенты разложения вектора, например, $\overline{DM}$, по данному базису (это три уравнения). Для этого надо иметь еще одно разложение этого вектора и еще две неизвестные. Заметим, что векторы $\boldsymbol{p} = \overline{BE}$ и $\boldsymbol{q} = \overline{BF}$ образуют базис на плоскости BEF, и вектор $\overline{BM}$ лежит в этой плоскости. Пусть y и z – коэффициенты разложения вектора $\overline{BM}$ по векторам $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$: $\overline{BM} = y\cdot\boldsymbol{p} + z\cdot\boldsymbol{q}$.

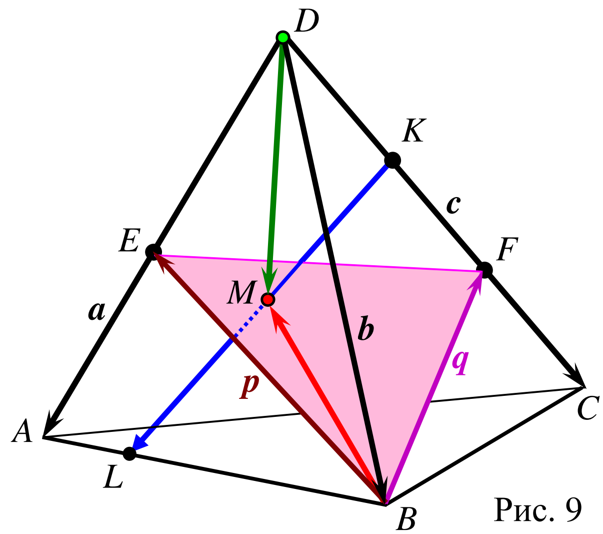


Рис. 9

Теперь нам надо найти числа x, y и z. Для этого разложим по исходному базису $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$:

$$\boldsymbol{p} = \overline{BE} = \overline{BD} + \overline{DE} = -\boldsymbol{b} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{q} = \overline{BF} = \overline{BD} + \overline{DF} = -\boldsymbol{b} + \tfrac{2}{3}\boldsymbol{c},$$

а затем разложим вектор $\overline{DM}$ по базису $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ вторым способом:

2) $\overline{DM} = \overline{DB} + \overline{BM} = \boldsymbol{b} + y\boldsymbol{p} + z\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b} + y\left(-\boldsymbol{b} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}\right) + z\left(-\boldsymbol{b} + \tfrac{2}{3}\boldsymbol{c}\right) =$

$= \tfrac{1}{2}y\cdot\boldsymbol{a} + (1-y-z)\cdot\boldsymbol{b} + \tfrac{2}{3}z\cdot\boldsymbol{c}.$

В силу единственности разложения вектора по базису, коэффициенты при векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ должны быть равны в обоих разложениях. Получим систему трех уравнений с тремя неизвестными, которую решим, выразив y и z через x из первого и третьего уравнений и подставив их во второе уравнение:

$$\begin{cases} \tfrac{3}{4}x = \tfrac{1}{2}y, \\ \tfrac{1}{4}x = 1 - y - z, \\ \tfrac{1}{3}(1-x) = \tfrac{2}{3}z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \tfrac{3}{2}x, \\ \tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x = 1, \\ z = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \tfrac{2}{5}, \\ y = \tfrac{3}{5}, \\ z = \tfrac{3}{10}. \end{cases}$$

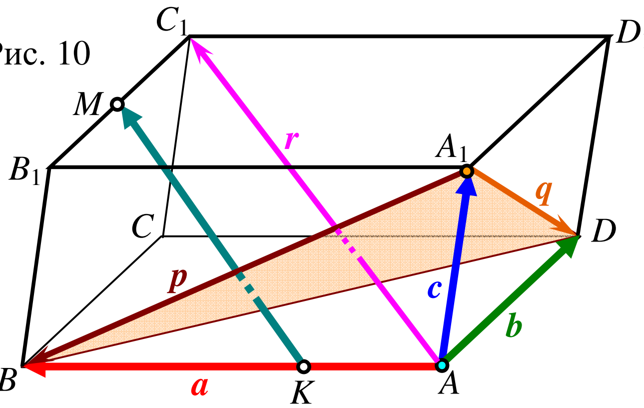
Итак, $\overline{BM} = \tfrac{3}{5}\boldsymbol{p} + \tfrac{3}{10}\boldsymbol{q}$ и} $KM : ML = x : (1-x) = \tfrac{2}{5} : \tfrac{3}{5} = 2 : 3$. ■

Пример 9. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки K и M расположены на рёбрах AB и B_1C_1 и делят их в отношении $AK : KB = 1 : 2$, $B_1M = MC_1$. Найти проекции вектора $\overline{KM}$: (а) на плоскость A_1BD параллельно прямой

AC_1; (б) на прямую AC_1 параллельно плоскости A_1BD. Ответ представить в виде разложения по векторам $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overline{AD}$, $\boldsymbol{c} = \overline{AA_1}$.

Решение. В плоскости A_1BD выберем неколлинеарные векторы $\boldsymbol{p} = \overline{A_1B}$, $\boldsymbol{q} = \overline{A_1D}$, и найдем разложение вектора $\overline{KM}$ по новому базису $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r} = \overline{AC_1}$. (см. Рис. 10). Новые базисные векторы выражаются через исходный базис $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ следующим образом:

Рис. 10



$\boldsymbol{p} = \overline{A_1B} = \overline{A_1A} + \overline{AB} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$,

$\boldsymbol{q} = \overline{A_1D} = \overline{A_1A} + \overline{AD} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $\quad \boldsymbol{r} = \overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CC_1} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$. Поэтому $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} + 3\boldsymbol{c}$. Отсюда получим выражения старых базисных векторов через новые:

$\boldsymbol{c} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{p} + \frac{1}{3}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) = \frac{2}{3}\boldsymbol{p} - \frac{1}{3}\boldsymbol{q} + \frac{1}{3}\boldsymbol{r}$,

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{q} + \frac{1}{3}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) = -\frac{1}{3}\boldsymbol{p} + \frac{2}{3}\boldsymbol{q} + \frac{1}{3}r$. Теперь разложим вектор $\overline{KM}$ сначала по исходному базису $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$, а потом и по новому базису $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\}$:

$$\overline{KM} = \overline{KB} + \overline{BB_1} + \overline{B_1M} = \tfrac{2}{3}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{b} =$$
$$= \tfrac{2}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\boldsymbol{p} - \tfrac{1}{3}\boldsymbol{q} + \tfrac{1}{3}\boldsymbol{r}\right) + \tfrac{1}{3}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{3}\boldsymbol{p} + \tfrac{2}{3}\boldsymbol{q} + \tfrac{1}{3}r\right) =$$
$$= -\tfrac{1}{18}\boldsymbol{p} - \tfrac{2}{9}\boldsymbol{q} + \tfrac{13}{18}\boldsymbol{r}.$$

Следовательно, проекция вектора $\overline{KM}$ на плоскость A_1BD параллельно прямой AC_1 равна:

$$\mathrm{Pr}_{A_1BD}^{AC_1}\left(\overline{KM}\right) = -\tfrac{1}{18}\boldsymbol{p} - \tfrac{2}{9}\boldsymbol{q} = -\tfrac{1}{18}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) - \tfrac{2}{9}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = -\tfrac{1}{18}\boldsymbol{a} - \tfrac{2}{9}\boldsymbol{b} + \tfrac{5}{18}\boldsymbol{c},$$

а проекция вектора $\overline{KM}$ на прямую AC_1 параллельно плоскости A_1BD есть

$$\mathrm{Pr}_{AC_1}^{A_1BD}\left(\overline{KM}\right) = \tfrac{13}{18}\boldsymbol{r} = \tfrac{13}{18} \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \tfrac{13}{18}\boldsymbol{a} + \tfrac{13}{18}\boldsymbol{b} + \tfrac{13}{18}\boldsymbol{c}. \blacksquare$$

Пример 10. В пространстве даны пять точек $A(-1;4;3)$, $B(1;3;8)$, $C(5;7;-3)$, $D(3;10;1)$ и $M(-1;-6;14)$. Найти: (а) координаты точки N – проекции точки M на плоскость ABC параллельно прямой AD; (б) координаты точки K – проекции точки M на прямую AD параллельно плоскости ABC; (в) вектор $\boldsymbol{q}$ – проекцию вектора $\boldsymbol{p}(10;9;-16)$ на плоскость ABD параллельно прямой AC, (г) проекцию вектора $\boldsymbol{p}$ на направление вектора $\overline{AC}$ параллельно плоскости ABD.

Решение. Рассмотрим базис $\boldsymbol{b}=\overline{AB}\{2;-1;5\}$, $\boldsymbol{c}=\overline{AC}\{6;3;-6\}$, $\boldsymbol{d}=\overline{AD}\{4;6;-2\}$ и найдем разложение вектора $\overline{AM}\{0;-10;11\}$ по этому базису:

$$x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}+z\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}=\overline{AM}\Leftrightarrow x\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}6\\3\\-6\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-10\\11\end{pmatrix}.$$

Получится система линейных уравнений $\begin{cases}2x+6y+4z=0,\\-x+3y+6z=-10,\\5x-6y-2z=11,\end{cases}$ решение которой (например, методом Крамера): $x=2,\ y=\frac{1}{3},\ z=-\frac{3}{2}$. Следовательно, $\overline{AM}=2\cdot\overline{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overline{AC}-\frac{3}{2}\cdot\overline{AD}$, значит, проекция вектора $\overline{AM}$ на плоскость ABC параллельно прямой AD есть вектор $\overline{AN}=2\cdot\overline{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overline{AC}=$ $=2\cdot\{2;-1;5\}+\frac{1}{3}\cdot\{6;3;-6\}=\{6;-1;8\}$, поэтому точка N имеет координаты: $x_N=x_A+x_{\overline{AN}}=-1+6=5,\ y_N=y_A+y_{\overline{AN}}=4-1=3,$ $z_N=z_A+z_{\overline{AN}}=3+8=11$. Следовательно, проекция точки M на плоскость ABC параллельно прямой AD есть точка N с координатами $\mathrm{Pr}_{ABC}^{AD}(M)=N(5;3;11)$.

Аналогично, проекция вектора $\overline{AM}$ на прямую AD параллельно плоскости ABC есть вектор $\overline{AK}=-\frac{3}{2}\overline{AD}=-\frac{3}{2}\{4;6;-2\}=\{-6;-9;3\}$, поэтому точка K имеет координаты: $x_K=x_A+x_{\overline{AK}}=-1-6=-7$, $y_K=y_A+y_{\overline{AK}}=4-9=-5$, $z_K=z_A+z_{\overline{AK}}=3+3=6$. Итак, $\mathrm{Pr}_{AD}^{ABC}(M)=K(-7;-5;6)$.

Для нахождения проекций вектора $\boldsymbol{p}(10;9;-16)$ также разложим его по тому же базису:

$$\alpha\boldsymbol{b}+\beta\boldsymbol{c}+\gamma\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}\Leftrightarrow\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}6\\3\\-6\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\9\\-16\end{pmatrix},$$ получим

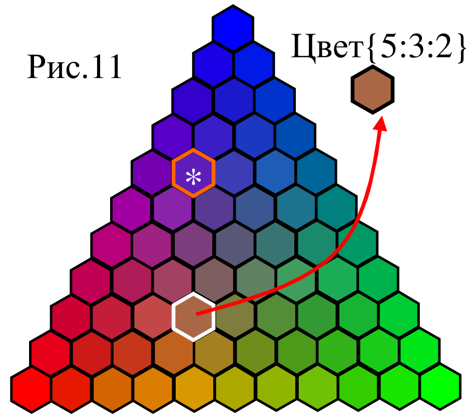
систему уравнений

$\begin{cases}2\alpha+6\beta+4\gamma=10,\\-\alpha+3\beta+6\gamma=9,\\5\alpha-6\beta-2\gamma=-16,\end{cases}$, ее решение: $\alpha=-1,\ \beta=\frac{5}{3},\ \gamma=\frac{1}{2}$, поэтому проекция вектора $\boldsymbol{p}$ на плоскость ABD есть вектор $\boldsymbol{q}=\mathrm{Pr}_{ABD}^{AC}(\boldsymbol{p})=\alpha\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{d}=$ $=-\{2;-1;5\}+\frac{1}{2}\{4;6;-2\}=\{0;4;-6\}$, а проекция вектора $\boldsymbol{p}$ на направление вектора $\boldsymbol{c}=\overline{AC}$ параллельно плоскости ABD равна $\mathrm{Pr}_{\overline{AC}}^{ABD}(\boldsymbol{p})=$ $=\beta\cdot|\boldsymbol{c}|=\frac{5}{3}\cdot\sqrt{36+9+36}=15.$

Ответы: (а) $\mathrm{Pr}_{ABC}^{AD}(M)=N(5;3;11)$; (б) $\mathrm{Pr}_{AD}^{ABC}(M)=K(-7;-5;6)$; (в) $\mathrm{Pr}_{ABD}^{AC}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{q}\{0;4;-6\}$; (г) $\mathrm{Pr}_{\overline{AC}}^{ABD}(\boldsymbol{p})=15$.■

1.19. Барицентрические координаты на плоскости. Пусть заданы три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, еще точка отсчета O. Тогда для любой точки M пространства найдутся три числа α, β и γ такие, что $\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC}$. При этом, точка M принадлежит плоскости ABC тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta + \gamma = 1$, а числа α, β и γ определены однозначно и не зависят от положения точки O. Числа α, β и γ, а также любая тройка чисел, им пропорциональная, называются ***барицентрическими координатами*** точки M относительно точек A, B и C. Барицентрические координаты указываются в фигурных скобках и разделяются двоеточием: $M\{\alpha : \beta : \gamma\}$. Это название связано с тем, что если в точках A, B и C сосредоточены массы α, β и γ соответственно, то центр масс этих трех точек имеет барицентрические координаты $\{\alpha : \beta : \gamma\}$. Барицентрические координаты, сумма которых равна единице, называются ***приведёнными***.

Рис.11



Если точка M имеет в плоскости ABC относительно точек A, B и C барицентрические координаты $M\{p : q : r\}$, то это значит, что для любой точки отсчета O справедливо представление:

$$\overline{OM} = \tfrac{p}{p+q+r}\overline{OA} + \tfrac{q}{p+q+r}\overline{OB} + \tfrac{r}{p+q+r}\overline{OC}.$$

Замечание. Если $\alpha + \beta + \gamma = 1$ и $\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC}$, то числа α и β определяются из разложения: $\overline{CM} = \alpha \cdot \overline{CA} + \beta \cdot \overline{CB}$, а $\gamma = 1 - \alpha - \beta$.

Пример 11. В треугольнике ABC известны длины его сторон $|BC| = a$, $|AC| = b$ $|AB| = c$. Найти барицентрические координаты относительно его вершин: (а) точки пересечения медиан M; (б) центра P вписанной окружности P.

Решение. (а) В примере 3 мы уже получили искомое разложение радиус-вектора точки пересечения медиан: $\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} + \frac{1}{3}\overline{OC}$. В качестве барицентрических координат можно взять любую тройку чисел, пропорциональных этим коэффициентам, например $M\{1 : 1 : 1\}$.

(б) Воспользуемся найденным в примере 4 разложением радиус-вектора точки P: $\overline{OP} = \dfrac{a}{a+b+c}\overline{OA} + \dfrac{b}{a+b+c}\overline{OB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overline{OC}$. В качестве барицентрических координат можно взять любую тройку чисел, пропорциональных этим коэффициентам, например $P\{a : b : c\}$. ■

1.20. Барицентрические координаты на плоскости очень удобны для графического представления смеси трех веществ. А именно, если смесь содержит вещества A, B и C в пропорции $\alpha : \beta : \gamma$, то эта смесь изображается точкой M треугольника ABC с барицентрическими координатами $M\{\alpha:\beta:\gamma\}$. Как известно, на экранах мониторов и телевизоров каждый цвет **заданной яркости** есть комбинация трех основных цветов: красного (цвет №1), зелёного (цвет №2) и синего (цвет №3), взятых в определённой пропорции. Следовательно, различные оттенки цветов одной яркости заполняют собой внутренность треугольника, вершины которого соответствуют этим трём основным цветам. Этот треугольник называется ***цветовым***. (см. Рис. 11). Цвет, состоящий, например на 50% из красного, на 30% из зеленого и 20% синего цвета, находится в точке этого треугольника с барицентрическими координатами {5:3:2}.

1.21. Положение точки M относительно сторон треугольника ABC можно определить по знаку её приведенных барицентрических координат $\{\alpha:\beta:\gamma\}$. А именно:

точка M лежит внутри треугольника ABC $\Leftrightarrow$ $(\alpha>0, \beta>0, \gamma>0)$;

точка M лежит на прямой AC $\Leftrightarrow \beta=0$;

точка M лежит вне треугольника ABC, но внутри угла ACB $\Leftrightarrow \alpha>0, \beta>0, \gamma<0$.

Теперь дадим другое решение Примера 8. А именно, ту часть решения примера 8, которая расположена на стр. 13 и 14 внутри красных фигурных скобок, следует заменить следующим текстом:

Возьмем в качестве точки отсчета точку D, и выразим через радиус-векторы вершин E, B и F радиус-вектор точки M: $\overline{DE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{a}=2\cdot\overline{DE}$, $\overline{DB}=\boldsymbol{b}$, $\overline{DF}=\frac{2}{3}\boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{c}=\frac{3}{2}\overline{DF}$, поэтому

$$\overline{DM}=\tfrac{3}{4}x\cdot\boldsymbol{a}+\tfrac{1}{4}x\cdot\boldsymbol{b}+\tfrac{1}{3}(1-x)\cdot\boldsymbol{c}=\tfrac{3}{2}x\cdot\overline{DE}+\tfrac{1}{4}x\cdot\overline{DB}+\tfrac{1}{2}(1-x)\cdot\overline{DF}.$$

Но точка M принадлежит плоскости EBF тогда и только тогда, когда сумма коэффициентов последнего разложения равна 1. Следовательно,

$$\tfrac{3}{2}x+\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{2}(1-x)=1 \Rightarrow 6x+x+2-2x=4 \Rightarrow x=\tfrac{2}{5}. \ \blacksquare$$

Пример 12. Точка M имеет относительно точек A, B и С барицентрические координаты $M\{3;-2;4\}$. Зная декартовы координаты вершин $A(-2;1;4)$, $B(3;2;5)$ и $C(1;3;2)$, найти декартовы координаты точки M.

Решение. Радиус вектор точки M выражается через радиус-векторы точек A, B и C формулой:

$$\overline{OM}=\frac{3}{3+(-2)+4}\overline{OA}+\frac{-2}{3+(-2)+4}\overline{OB}+\frac{4}{3+(-2)+4}\overline{OC}=$$

$$=\frac{3}{5}\overline{OA}-\frac{2}{5}\overline{OB}+\frac{4}{5}\overline{OC}.$$

Поэтому для декартовых координат точки M справедливо аналогичное представление:

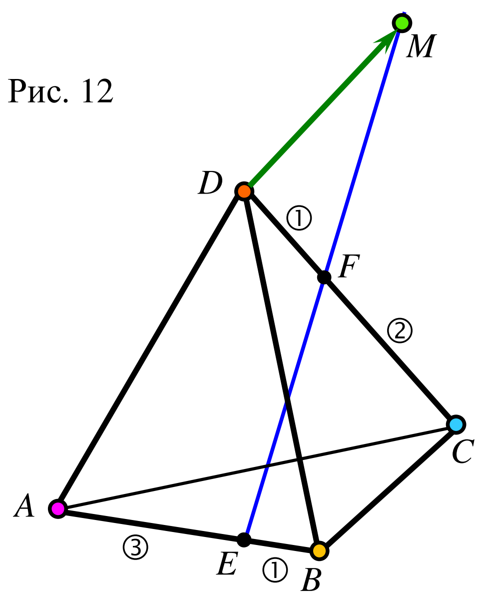
$$x_M=\tfrac{1}{5}\left(3x_M-2x_B+4x_C\right)=\tfrac{1}{5}(3\cdot(-2)-2\cdot 3+4\cdot 1)=-\tfrac{8}{5};$$
$$y_M=\tfrac{1}{5}\left(3y_M-2y_B+4y_C\right)=\tfrac{1}{5}(3-4+12)=\tfrac{11}{5};$$
$$z_M=\tfrac{1}{5}\left(3z_M-2z_B+4z_C\right)=\tfrac{1}{5}(12-10+8)=2.$$

Итак, точка *M* имеет декартовы координаты $M\left(-\tfrac{8}{5};\tfrac{11}{5};2\right)$. ■

1.22. Барицентрические координаты в пространстве. *Пусть даны четыре точки A, B, C и D, не лежащие в одной плоскости, и произвольная точка отсчета O. Тогда для любой точки M существуют четыре числа* α, β, γ *и* δ *такие, что* $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$ *и* $\overline{OM}=\alpha\cdot\overline{OA}+\beta\cdot\overline{OB}+\gamma\cdot\overline{OC}+\delta\cdot\overline{OD}$. *Числа* α, β, γ *и* δ *определены однозначно и не зависят от выбора точки O.* Числа α, β, γ и δ, а также любая другая четверка чисел, ей пропорциональная, называется ***барицентрическими координатами*** точки *M* относительно точек *A*, *B*, *C* и *D*. Если вектор $\overline{DM}=\alpha\cdot\overline{DA}+\beta\cdot\overline{DB}+\gamma\cdot\overline{DC}$, точка *M* имеет приведенные барицентрические координаты $\{\alpha:\beta:\gamma:\delta\}$, где $\delta=1-\alpha-\beta-\gamma$. Обратное утверждение тоже справедливо.

Пример 13. В тетраэдре *ABCD* точки *E* и *F* расположены на ребрах *AB* и *CD* соответственно и делят их в отношении $AE:EB=3:1$, $CF:FD=2:1$. На прямой *EF* расположена точка *M* так, что *F* – середина отрезка *EM* (см. Рис. 12). Найти барицентрические координаты точки *M* относительно точек *A*, *B*, *C* и *D*.

Рис. 12



Решение. Разложим по трем некомпланарным векторам $\boldsymbol{a}=\overline{DA}$, $\boldsymbol{b}=\overline{DB}$ и $\boldsymbol{c}=\overline{DC}$ сначала вектор $\overline{EF}$:

$$\overline{EF}=\overline{EA}+\overline{AD}+\overline{DF}=\tfrac{3}{4}\overline{BA}-\boldsymbol{a}+\tfrac{1}{3}\overline{DC}=$$
$$=\tfrac{3}{4}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}+\tfrac{1}{3}\boldsymbol{c}=-\tfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\tfrac{3}{4}\boldsymbol{b}+\tfrac{1}{3}\boldsymbol{c},$$

а затем вектор $\overline{DM}$:

$$\overline{DM}=\overline{DA}+\overline{AE}+\overline{EM}=\boldsymbol{a}+\tfrac{3}{4}\overline{AB}+2\overline{EF}=\boldsymbol{a}+\tfrac{3}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+2\left(-\tfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\tfrac{3}{4}\boldsymbol{b}+\tfrac{1}{3}\boldsymbol{c}\right)=$$
$$=-\tfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\tfrac{3}{4}\boldsymbol{b}+\tfrac{2}{3}\boldsymbol{c}.$$

Следовательно, $\alpha=-\tfrac{1}{4}$, $\beta=-\tfrac{3}{4}$, $\gamma=\tfrac{2}{3}\Rightarrow\delta=1-\alpha-\beta-\gamma=\tfrac{4}{3}$.

Искомые барицентрические координаты точки *M* – любая четверка чисел, пропорциональная числам α, β, γ и δ, например (если коэффициент пропорциональности взять равным 12), $M\{-3:-9:8:16\}$. ■

1.23. Центр масс совокупности материальных точек.

Пусть даны n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, в которых сосредоточены массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно. ***Векторным статическим моментом*** этой системы точек относительно точки отсчета O называется вектор

$\boldsymbol{M}_O = m_1\overline{OA_1} + m_2\overline{OA_2} + \ldots + m_n\overline{OA_n}$. Точка C называется ***центром масс*** системы материальных точек, если относительно точки C векторный момент этой совокупности равен нулю: $\boldsymbol{M}_C = m_1\overline{CA_1} + m_2\overline{CA_2} + \ldots + m_n\overline{CA_n} = \boldsymbol{0}$.

Центр масс определен не только для конечной совокупности точек, но и для любой сплошной материальной линии, поверхности или тела.

Центроидом совокупности геометрических точек, называется центр масс точек, в которых сосредоточены одинаковые (например, единичные) массы. Центроид определяется и для любой геометрической фигуры – это центр масс этой фигуры, наделенной некоторой (не важно, какой) постоянной плотностью, например, равной единице. И тогда в роли массы линии, поверхности или тела выступает её длина, площадь или объем соответственно[5].

Центр масс C совокупности точек определен однозначно, и его радиус вектор относительно любой точки отсчета O вычисляется по формуле:

$$\overline{OC} = \frac{1}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}\left(m_1\overline{OA_1} + m_2\overline{OA_2} + \ldots + m_n\overline{OA_n}\right).$$

Радиус-вектор центроида C совокупности n точек $A_1,\ A_2,\ ,\ldots,A_n$ равен $\overline{OC} = \frac{1}{n}\left(\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \ldots + \overline{OA_n}\right)$.

Если совокупность точек (геометрическая фигура) имеет ось или плоскость симметрии, то и её центроид лежит на этой оси симметрии (соответственно в плоскости симметрии). Если фигура имеет центр симметрии, то этот центр симметрии и является её центроидом.

1.24. Если говорить о центроиде **многоугольника**, то надо иметь в виду, что последний можно рассматривать как:

1) совокупность его **вершин**;

2) совокупность всех его **сторон**, т.е. ***контур*** этого многоугольника;

3) часть плоскости, ограниченной сторонами многоугольника, т.е. ***сплошной*** многоугольник (как, например, вырезанный из листа картона).

Центры масс этих трёх фигур, вообще говоря, не совпадают.

Аналогично, **многогранник** можно рассматривать как:

1) совокупность всех его вершин;

2) как совокупность всех его **рёбер**, т.е. это ***каркас*** данного многогранника;

3) как совокупность всех его **граней**, т.е. это ***поверхность*** многогранника;

4) как часть пространства, ограниченного гранями многогранника, т.е. ***сплошной*** многогранник (как например, выпиленный из куска дерева).

Центры масс этих четырех фигур, вообще говоря, не совпадают.

1. 25. При нахождении центра масс полезен следующий принцип.

---

[5] Для точных определений и вывода формул для центра масс или центроида линии, поверхности или тела требуется понятие интеграла (определенного, двойного, тройного, криволинейного или поверхностного).

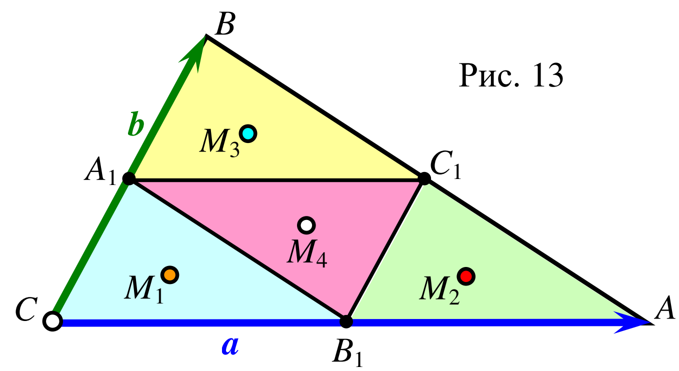


Рис. 13

Принцип группировки: *если первая совокупность материальных точек суммарной массой* m_1 *имеет центр масс в точке* C_1, *вторая группа материальных точек суммарной массой* m_2 *имеет центр масс в точке* C_2, *то центр масс объединённой совокупности точек совпадает с центром масс точек* C_1 *и* C_2, *в которых сосредоточены массы* m_1 *и* m_2 *соответственно.*

Обобщенный принцип группировки: *Если имеется k групп совокупностей материальных точек, и первая совокупность суммарной массой* m_1 *имеет центр масс в точке* C_1, *вторая группа суммарной массой* m_2 *имеет центр масс в точке* C_2, *и т.д., и последняя совокупность суммарной массой* m_k *имеет центр масс в точке* C_k, *то центр масс объединённой совокупности точек совпадает с центром масс точек* $C_1, C_2, \ldots, C_k$, *в которых сосредоточены массы* $m_1, m_2, \ldots. m_k$ *соответственно.*

Пример 14. Используя принцип группировки, найти положение центроида контура[6] произвольного треугольника.

Решение. Контур треугольника ABC состоит из **линий** (трех его сторон), поэтому роль массы здесь выполняет **длина**. Заменим каждую сторону треугольника её центром масс (т.е её серединой), в котором сосредоточена масса, равная **длине** этой стороны. Получим точки: A_1 (середина BC), B_1 (середина AC) и C_1 (середина AB), в которых сосредоточены массы a, b и c соответственно. Тогда искомый центроид Q контура треугольника – это центр масс данных трех материальных точек, и его радиус-вектор равен $\overline{OQ} = \dfrac{a}{a+b+c}\overline{OA_1} + \dfrac{b}{a+b+c}\overline{OB_1} + \dfrac{c}{a+b+c}\overline{OC_1}$. Заметим, что стороны треугольника $A_1B_1C_1$ вдвое меньше соответствующих сторон треугольника ABC, поэтому эта формула выражает радиус-вектор центра вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

Ответ: центроид контура треугольника находится в центре окружности, вписанной в треугольник, образованного средними линиями исходного треугольника. ■

Пример 15. Доказать, что центроид сплошного треугольника расположен в точке пересечения его медиан, т.е. совпадает с центроидом вершин треугольника.

[6] ***Контуром*** многоугольника называется совокупность всех его сторон. Сам (сплошной!) многоугольник представляет собой часть плоскости, ограниченной своим контуром.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, пусть – M положение центроида этого (сплошного!) треугольника. Разложим вектор $\overline{CM}$ по базису $\boldsymbol{a}=\overline{CA}$, $\boldsymbol{b}=\overline{CB}$: $\overline{CM}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$. Разобьем треугольник ABC средними линиями A_1B_1, A_1C_1 и B_1C_1 на четыре подобных ему треугольника вдвое меньших размеров A_1B_1C, AB_1C_1, A_1BC_1 и $A_1B_1C_1$ (см. Рис. 13). Обозначим через M_1, M_2, M_3 и M_4 соответственно центроиды этих (сплошных!) треугольников. В силу их подобия, радиус-векторы центроидов этих треугольников относительно соответствующих точек имеют то же представление. Выпишем радиус-векторы этих центроидов относительно точки C:

$$\overline{CM_1}=\lambda\overline{CB_1}+\mu\overline{CA_1}=\lambda\cdot\tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\mu\cdot\tfrac{1}{2}\boldsymbol{b};$$

$$\overline{CM_2}=\overline{CB_1}+\overline{B_1M_2}=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\lambda\cdot\tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\mu\cdot\tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}=\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b});$$

$$\overline{CM_3}=\overline{CA_1}+\overline{A_1M_3}=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\lambda\cdot\tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\mu\cdot\tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}=\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b});$$

$$\overline{CM_4}=\overline{CC_1}+\overline{C_1M_4}=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}-\lambda\cdot\tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\mu\cdot\tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}=\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}).$$

Поскольку роль массы здесь выполняет площадь, и площадь каждого из меньших треугольников равна 1/4 от площади исходного треугольника, то, по принципу группировки,

$$\overline{CM}=\tfrac{1}{4}\left(\overline{CM_1}+\overline{CM_2}+\overline{CM_3}+\overline{CM_4}\right)\Leftrightarrow$$

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=$$

$$=\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})+\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})+\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})+\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})\right)=$$

$$=\tfrac{1}{4}\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}\right)\Rightarrow\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\tfrac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\Rightarrow\lambda=\mu=\tfrac{1}{3}.$$

Отсюда радиус-вектор центроида сплошного треугольника относительно произвольной точки отсчета O равен

$$\overline{OM}=\overline{OC}+\overline{CM}=\overline{OC}+\tfrac{1}{3}\left(\overline{CA}+\overline{CB}\right)=\overline{OC}+\tfrac{1}{3}\left(\overline{OA}-\overline{OC}++\overline{OB}-\overline{OC}\right)=$$

$$=\tfrac{1}{3}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right)$$

и совпадает с центроидом трех вершин треугольника ABC. ■

Задачи для самостоятельного решения к главе 1.

1. 1. В пространстве даны произвольные точки A, B, C, D, E и F. Найти: $\overline{AB}-\overline{ED}+\overline{EF}+\overline{BC}-\overline{DC}$; (б) $\overline{AC}+\overline{BA}-\overline{BF}+\overline{ED}-\overline{EC}+\overline{DF}$.

1. 2. Дан треугольник ABC. Построить векторы: (а) $\overline{AB}+\overline{CB}$; (б) $\overline{AB}-\overline{BC}$; (в) $2\cdot\overline{AB}-3\cdot\overline{AC}$; (г) $\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}+2\cdot\overline{BC}$; (д) $\overline{AB}-\overline{AC}+\overline{BC}$.

1. 3. Дан тетраэдр $ABCD$. Построить векторы: (а) $\overline{AB}+\overline{CD}$; (б) $\overline{AB}+\overline{CD}-\overline{AD}$; (б) $2\cdot\overline{AD}-\frac{2}{3}\cdot\overline{BC}$; (г) $\overline{AC}-2\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{BD}$.

1. 4. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ – произвольные векторы. Доказать, что векторы $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ компланарны.

1. 5. С помощью векторной алгебры доказать следующие теоремы планиметрии:

(а) свойство средней линии треугольника; (б) свойство средней линии трапеции;

(в) теорему о пересечении медиан треугольника.

(г) если медианы одного треугольника параллельны сторонам другого треугольника, то и медианы второго треугольника параллельны сторонам первого.

1. 6. С помощью векторной алгебры доказать следующие теоремы стереометрии:

(а) Все четыре медианы[7] любого тетраэдра пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении $3:1$, считая от вершины, и эта точка совпадает с точкой пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных рёбер из Примера 5 (эта точка называется ***центроидом*** вершин тетраэдра).

(б) Все четыре диагонали произвольного параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

1. 7. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Доказать, что $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=\boldsymbol{0}$.

1. 8. В треугольнике ABC точки D, E и F делят стороны AB, BC и AC соответственно в одинаковом отношении: $AD:DB=BE:EC=CF:FA$. Доказать, что $\overline{AE}+\overline{BF}+\overline{CD}=\boldsymbol{0}$.

1. 9. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, $\overline{AB}=\boldsymbol{p}$, $\overline{BC}=\boldsymbol{q}$. Выразить через $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ векторы: (а) $\overline{CD}$; (б) $\overline{CE}$; (в) $\overline{FD}$; (г) $\overline{AE}$; (е) $\overline{AD}$; (ж) $\overline{BE}$.

1. 10. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$, $\overline{AB}=\boldsymbol{p}$, $\overline{AC}=\boldsymbol{q}$. Выразить через $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ векторы: (а) $\overline{AD}$; (б) $\overline{CD}$; (в) $\overline{AE}$; (г) $\overline{BD}$. $\left(\cos 36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$.

1. 11. Точки M и N – середины рёбер (сторон) AD и BC тетраэдра (четырехугольника) $ABCD$. Доказать, что $\overline{MN}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{DC}\right)$.

1. 12. Даны четыре вектора $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$. Найти их сумму, если $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}=\lambda\boldsymbol{p}$ и векторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ не компланарны.

1. 13. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$. Найти значение λ, при котором векторы $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}+\lambda\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\lambda\boldsymbol{r}$ компланарны.

1. 14. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$. Найти значения α и β, при которых векторы $\alpha\boldsymbol{p}+\beta\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}+2\alpha\boldsymbol{q}+3\beta\boldsymbol{r}$ коллинеарны.

[7] ***Медианой*** тетраэдра называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани.

1. 15. В трапеции $ABCD$ известно отношение длин оснований: $AB/CD=\lambda$. Найти координаты вектора $\overline{CB}$ в базисе из векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

1. 16. Две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD окружности с центром O пересекаются в точке E. Доказать, что

$$\overline{OE}=\tfrac{1}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}\right)$$

1. 17. Пусть точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно треугольника ABC. Доказать, что для любой точки O выполняется равенство $\overline{OA_1}+\overline{OB_1}+\overline{OC_1}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$.

1. 18. Пусть M – точка пересечения медиан тетраэдра $ABCD$. Доказать, что

$$\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+\overline{MD}=\boldsymbol{0}.$$

1. 19. В пространстве даны два параллелограмма (или два тетраэдра) $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых E и E_1 – точки пересечения диагоналей (соответственно, медиан). Доказать, что

$$\overline{EE_1}=\tfrac{1}{4}\left(\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}+\overline{DD_1}\right).$$

1. 20. На плоскости даны две точки A и B и точка отсчета O. Доказать, что произвольная точка M лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\overline{OM}=\alpha\cdot\overline{OA}+\beta\cdot\overline{OB}$ для некоторых α и β таких, что $\alpha+\beta=1$.

1. 21. Доказать с помощью векторной алгебры, что если M – произвольная точка внутри треугольника ABC и прямые AM, BM и CM пересекают стороны этого треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, то

(а) $\dfrac{AC_1}{C_1B}\cdot\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}=1$ (**теорема Чевы**);

(б) $\dfrac{A_1M}{AA_1}+\dfrac{B_1M}{BB_1}+\dfrac{C_1M}{CC_1}=1$.

1. 22. Доказать с помощью векторной алгебры **теорему Менелая**: *если некоторая прямая пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках C_1 и B_1 соответственно, а продолжение стороны BC – в точке A_1, то*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

1. 23. Пусть точки M и K делят рёбра AD и BC тетраэдра $ABCD$ в одинаковом отношении $AM:MD=BK:KC=\alpha:\beta$. Доказать, что векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{MK}$ компланарны, и разложить последний вектор по первым двум.

1. 24. Основанием призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является трапеция $ABCD$, в которой $AD\parallel BC$. Известно, что векторы $\overline{BA_1}$, $\overline{CB_1}$ и $\overline{DC_1}$ компланарны. Найти отношение длин ребер AD и BC.

1. 25. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Разложить вектор $\overline{AA_1}$ по векторам $\boldsymbol{p} = \overline{AC_1}$, $\boldsymbol{q} = \overline{BA_1}$ и $\boldsymbol{r} = \overline{CB_1}$.

1. 26. В тетраэдре $ABCD$ точки M, N и K расположены на рёбрах AB, AC и AD и делят их в отношении $AM : MB = 1:1, AN : NC = 1:3$ и $AK : KD = 2:1$. Доказать, что векторы $\boldsymbol{p} = \overline{BK}$, $\boldsymbol{q} = \overline{CM}$ и $\boldsymbol{r} = \overline{DN}$ не компланарны и разложить по ним вектор $\overline{BC}$.

1. 27. В треугольнике ABC точки D и E расположен на стороне AB, а точки F и G – на сторонах AC и BC соответственно, причем, $AD : DB = 1:3$, $AE : EB = 3:1$, $AF : FC = 1:2$, $BG = GC$. Отрезки DG и EF пересекаются в точке M. Найти отношения $DM : MG$ и $EM : MF$.

1. 28. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра AD, а точка K делит ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 2:1$. Отрезок B_1E пересекает плоскость BC_1K в точке M. Найти отношение $EM : MB_1$ и разложение вектора $\overline{BM}$ по векторам $\boldsymbol{p} = \overline{BK}$ и $q = \overline{BC_1}$.

1. 29. В треугольнике ABC известны координаты его вершин: $A(1;5;2)$, $B(3;8;8)$ и $C(5;7;6)$. Найти: (а) медиану AD; (б) биссектрису BE; (в) координаты точки пересечения медиан M; (г) координаты центра P вписанной окружности треугольника ABC.

1. 30. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC. Зная координаты вершин $A(-1;2;5), B(3;1;4)$ и точки пересечения диагоналей $E(5;6;7)$, найти координаты вершин C и D.

1. 31. В треугольнике ABC проведены медиана CD, биссектриса CL и высота CK, точки O и P – центры описанной и вписанной окружностей соответственно, M – точка пересечения медиан, H – ортоцентр треугольника ABC. Разложить по векторам $\boldsymbol{a} = \overline{CA}$ и $\boldsymbol{b} = \overline{CB}$ векторы: (а) $\overline{CD}$; (б) $\overline{CL}$; (в) $\overline{CK}$; (г) $\overline{CM}$; (д) $\overline{CP}$; (е) $\overline{CH}$; (ж) $\overline{CO}$ (коэффициенты разложения выразить через углы $\alpha = \angle BAC$ и $\beta = \angle ABC$).

1. 32. На плоскости дан треугольник ABC. (а) Построить точки с барицентрическими координатами (относительно вершин A, B и C): (1°) $\{0:0:1\}$; (2°) $\{3:1:0\}$; (3°) $\{2:3:5\}$; (4°) $\{1:-2:3\}$; (б) Найти барицентрические координаты точки N, лежащей на отрезке AK, где K лежит на стороне BC, $KN : NA = 1:3$, $BK : KC = 5:2$.

1. 33. Точка M имеет относительно треугольника ABC барицентрические координаты $\{x:y:z\}$. Найти $x \cdot \overline{MA} + y \cdot \overline{MB} + z \cdot \overline{MC}$.

1. 34. В тетраэдре $ABCD$ точки E и F расположены на ребрах AB и CD соответственно и делят их в отношении $AE : EB = 3:1$, $CF : FD = 2:1$. Точка M центрально симметрична точке E относительно точки F. Найти барицентрические координаты точки M относительно точек A, B, C и D.

1. 35. Пусть прямая ℓ и плоскость π не параллельны, $\boldsymbol{b}$ – проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую ℓ параллельно плоскости π, $\boldsymbol{c}$ – проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на плоскость π параллельно прямой ℓ. Найти $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

1. 36. Три плоскости π_1 π_2 и π_3 пересекаются по трём разным прямым: $\pi_2 \cap \pi_3 = \ell_1$, $\pi_1 \cap \pi_3 = \ell_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \ell_3$. Пусть $\boldsymbol{a}_k$ – проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на прямую ℓ_k параллельно плоскости π_k ($k = 1, 2, 3$). Найти $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$.

1. 37. Выразить через углы α, β и γ треугольника ABC барицентрические координаты: (а) центра P вписанной окружности; (б) центра Q описанной окружности; (в) точки H пересечения высот (непрямоугольного) треугольника ABC.

1. 38. Треугольник ABC с углами $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ вписан в окружность с центром O. Доказать, что

$$\overline{OA}\cdot\sin 2\alpha + \overline{OB}\cdot\sin 2\beta + \overline{OC}\cdot\sin 2\gamma = \boldsymbol{0}.$$

1. 39. В непрямоугольном треугольнике ABC с углами $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ высоты (или их продолжения) пересекаются в точке H. Вычислить

$$\overline{HA}\cdot \operatorname{tg}\alpha + \overline{HB}\cdot \operatorname{tg}\beta + \overline{HC}\cdot \operatorname{tg}\gamma.$$

1. 40. Внутри треугольника ABC дана точка M. Прямые AM и BM пересекают стороны BC и AC в точках A_1 и B_1 соответственно, причем, $AM : MA_1 = \alpha_1 : \alpha_2$, $BM : MB_1 = \beta_1 : \beta_2$. Найти барицентрические координаты точки M.

1. 41. Высоты треугольника ABC, проведенные из вершин A, B и C равны h_A, h_B и h_C соответственно. Внутри угла ACB находится точка M, удаленная от сторон BC и AC на расстояния d_A и d_B соответственно. Найти расстояние от точки M до стороны AB и барицентрические координаты точки M относительно вершин A, B и C. .

1. 42. Из произвольной точки внутри K равностороннего треугольника опущены перпендикуляры KD, KE и KF на его стороны BC, AC и AB соответственно. Доказать, что:

$$\overline{KO} = \tfrac{2}{3}\left(\overline{KD} + \overline{KE} + \overline{KF}\right),$$ где O – центр треугольника.

1. 43. Внутри треугольника ABC дана точка M. Прямые AM и BM пересекают стороны BC и AC в точках A_1 и B_1 соответственно, причем, $BA_1 : A_1C = \alpha_1 : \alpha_2$, $CB_1 : B_1A = \beta_1 : \beta_2$. Найти барицентрические координаты точки M относительно вершин A, B и C.

1. 44. На плоскости данный три точки M_1, M_2 и M_3, имеющие относительно вершин треугольника A, B и C барицентрические координаты (не обязательно приведенные): $M_1\{\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1\}$, $M_2\{\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2\}$ и $M_3\{\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3\}$. При каком необходимом и достаточном условии эти три точки лежат на одной прямой?

1. 45. В пространстве даны четыре точки M_1, M_2, M_3 и M_4, имеющие относительно вершин тетраэдра A, B, C и D барицентрические координаты (не обязательно приведенные): $M_1\{\alpha_1:\beta_1:\gamma_1:\delta_1\}$, $M_2\{\alpha_2:\beta_2:\gamma_2:\delta_2\}$, $M_3\{\alpha_3:\beta_3:\gamma_3:\delta_3\}$ и $M_4\{\alpha_4:\beta_4:\gamma_4:\delta_4\}$. При каком необходимом и достаточном условии эти четыре точки лежат в одной плоскости?

1. 46. Какие барицентрические координаты (относительно точек *A*, *B*, *C* и *D*) имеет точка *Q* – центр масс системы четырех точек *A*, *B*, *C* и *D*, в которых сосредоточены массы m_A, m_B, m_C и m_D соответственно?

1. 47. Какие барицентрические координаты имеет фиолетовый цвет, отмеченный белой звёздочкой на цветовом треугольнике на Рис. 11?

1. 48. Дано пять точек: $A(4;-2;-1)$, $B(1;4;2)$, $C(3;12;8)$, $D(5;0;10)$ и $M(14;-18;15)$. (а) Доказать, что точки *A*, *B*, *C* и *D* не лежат в одной плоскости; (б) найти координаты: (1°) точки *N* – проекции точки *M* на плоскость *ABD* параллельно прямой *BC*; (2°) точки *K* – проекции точки *M* на прямую *BC* параллельно плоскости *ABD*; (в) найти проекцию вектора $\boldsymbol{m}\{11;-1;10\}$ (1°) на плоскость *BCD* параллельно прямой *AB*; (2°) на прямую *AB* параллельно плоскости *BCD*; (3°) на направление вектора $\overline{BD}$ параллельно плоскости *ABC*.

1. 49. В тетраэдре *ABCD* точки *M* и *K* делят рёбра *AD* и *BC* в отношениях $AM:MD=1:2$, $BK:KC=3:1$, *N* – середина отрезка *MK*. Пусть *P* – проекция точки *N* на плоскость *BCD* параллельно прямой *AC*, *Q* – проекция точки *N* на прямую *AC* параллельно плоскости *BCD*. Найти: (а) проекцию вектора $\overline{MK}$ на плоскость *ACD* параллельно прямой *BC*; (б) проекцию вектора $\overline{MK}$ на прямую *BC* параллельно плоскости *ACD*. (ответы разложить по векторам $\boldsymbol{a}=\overline{CA}$, $\boldsymbol{b}=\overline{CB}$, $\boldsymbol{d}=\overline{CD}$); (в) барицентрические координаты точек *P* и *Q* относительно вершин тетраэдра.

1. 50. Пусть через точу *O* проходят три прямые *OA*, *OB* и *OC*, не лежащие в одной плоскости. Доказать, что любой вектор $\boldsymbol{m}$ однозначно представим в виде $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, где векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ лежат на прямых *OA*, *OB* и *OC* соответственно. Описать векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в терминах проекций.

1. 51. Доказать, что векторные статические моменты совокупности материальных точек относительно двух разных точек *O* и *P* связаны формулой:

$$\boldsymbol{M}_O=(m_1+m_2+\ldots+m_n)\overline{OP}+\boldsymbol{M}_P.$$

1. 52. Где расположен центроид: (а) отрезка; (б) параллелограмма; (в) круга (окружности); (г) параллелепипеда; (д) призмы.

1. 53. Найти барицентрические координаты центроида контура треугольника *ABC* относительно его вершин, **если** известны его: (а) стороны *a*, *b* и с, противолежащие вершинам *A*, *B* и *C* соответственно; (б) углы α, β и γ при вершинах *A*, *B* и *C* соответственно.

1. 54. В треугольнике *ABC* известны декартовы координаты его вершин: $A(3;1;4)$, $B(4;3;2)$, $C(6;7;6)$. Найти декартовы координаты центроида: (а) сплошного треугольника *ABC*; (б) контура треугольника *ABC*.

1. 55. Определить положение центроида **поверхности** произвольного тетраэдра.

1. 56. Найти барицентрические координаты центроида каркаса тетраэдра $ABCD$ относительно его вершин, если известны длины всех рёбер: $BC = a, AC = b, AB = c, AD = d, BD = e, CD = f$.

1. 57. Найти барицентрические координаты центроида каркаса тетраэдра, у которого противоположные рёбра попарно равны.

1. 58. В тетраэдре $ABCD$ известны площади его граней S_{ABC}, S_{ABD}, S_{ACD} и S_{BCD}. Найти барицентрические координаты (относительно вершин тетраэдра): (а) точки пересечения медиан тетраэдра; (б) центра его вписанного шара.

Глава 2. Скалярное произведение векторов.

2.1. Напомним, что ***углом*** между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – называется угол $\angle ACB$ между равными им векторами, отложенными от одной точки C: $\boldsymbol{a} = \overline{CA}$ $\boldsymbol{b} = \overline{CB}$, этот угол обозначается $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$ и может изменяться в пределах от 0° до 180° включительно. ***Скалярным произведением*** двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число (т.е. **скаляр**), обозначаемое (в разных книгах) $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b})$ (в данном пособии принято последнее обозначение), и которое равно нулю, если хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{b}$ нулевой, а если оба вектора ненулевые, то равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$.

2.2. Алгебраические свойства скалярного произведения (верные для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$):

(а) $(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{a})$ (коммутативность);

(б) $(\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})) = (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c})$ (дистрибутивность);

(в) $(\boldsymbol{a} \bullet \lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b})$ (ассоциативность);

(г) $(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2 \geq 0$, причем точное равенство выполняется, только когда $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$;

(д) $(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}) = 0$ тогда и только тогда, когда один из векторов нулевой или векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны.

2.3. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю.

Скалярным квадратом вектора $\boldsymbol{a}$ называется скалярное произведение этого вектора на себя: $\boldsymbol{a}^2 \underset{def}{=} (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{a})$. Поэтому свойство (г) можно записать так: $\boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \geq 0$. Отсюда следует простая, но полезная формула для длины вектора: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}$. Отметим, что не существует скалярного куба, и подавно, более высоких скалярных степеней вектора.

Из свойств (а) – (в) вытекает справедливость некоторых формул векторной алгебры, аналогичных хорошо известным формулам обычной алгебры:

(д) $(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 \pm 2(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}^2$; (е) $((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\bullet(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$.

2.4. ***Ортогональная проекция точки*** A на плоскость π – это точка пересечения этой плоскости с прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости π. ***Ортогональная проекция точки*** A на прямую ℓ – это точка пересечения этой прямой с плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно прямой ℓ.

Ортогональной проекцией вектора $\overline{AB}$ на плоскость π (на прямую ℓ) – называется вектор $\overline{A_1B_1}$, где точки A_1 и B_1 – ортогональные проекции точек A и B на эту плоскость (прямую). Ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на плоскость π (прямую ℓ) обозначаются $\mathrm{Pr}_{\pi}^{\perp}(\boldsymbol{b})$ и $\mathrm{Pr}_{\ell}^{\perp}(\boldsymbol{b})$ соответственно (символ $\perp$ иногда опускается). Если на прямой задано направление, то она называются ***осью***. ***Ортогональная проекция вектора*** $\overline{AB}$ ***на ось*** $\boldsymbol{m}$ – это **число** $\pm\left|\overline{A_1B_1}\right|$, где точки A_1 и B_1 – ортогональные точек A и B на эту ось, а знак плюс или минус выбирается в зависимости от того, совпадает ли направление вектора $\overline{A_1B_1}$ с направлением на оси m. Проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на ось, направленную по вектору $\boldsymbol{a}$, или короче, ***на направление вектора a***, обозначается $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}^{\perp}(\boldsymbol{b})$ или просто $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})$.

Ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на прямую ℓ находится по формуле $\mathrm{Pr}_{\ell}^{\perp}(\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ – произвольный ненулевой вектор прямой ℓ, $\lambda = \dfrac{(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2}$. Ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{a}$ находится по формуле: $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}^{\perp}(\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\boldsymbol{a}\hat{}\boldsymbol{b}) = \dfrac{(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|}$.

2.5. Физический смысл скалярного произведения. Работа A, совершаемая силой $\boldsymbol{f}$ на перемещение $\boldsymbol{s}$, равна скалярному произведению этих векторов: $A = (\boldsymbol{f}\bullet\boldsymbol{s})$.

2.6. ***Неравенство Коши – Буняковского***: $|(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})| \le |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$. Косинус угла между двумя ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вычисляется по формуле:

$$\cos(\boldsymbol{a}\,\hat{}\,\boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}.$$

2.7. Свойства длины вектора. Для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$:
(а) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \le |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$; (б) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \ge \big||\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|\big|$; (в) $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$.

Вектор длины 1 называется ***единичным*** или (почему-то) **ортом**. Из любого ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$ можно получить коллинеарный ему единичный вектор, для этого надо умножить его на число $\lambda = \pm\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$, это операция называется ***нормирование***. В результате получатся два единичных взаимно противоположных вектора $\boldsymbol{e}_{1,2} = \pm\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.[8]

2. 8. Скалярный квадрат алгебраической суммы нескольких векторов равен сумме скалярных квадратов каждого из этих векторов плюс алгебраическая сумма удвоенных попарных скалярных произведений этих векторов друг на друга, например,

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2 = \boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})+2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})-2(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c}).$$

2. 9. Полезное векторное тождество:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2+2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c}).$$

2. 10. Следствие (теорема косинусов для тетраэдра или произвольного четырехугольника): Для любых четырех точек пространства A, B, C и D:

$$AD^2+BC^2 = AB^2+CD^2+2AC\cdot BD\cdot\cos\varphi,$$

где φ – угол между лучами AC и BD.

2. 11. Если известны координаты векторов $\boldsymbol{a}_1\{x_1;\, y_1;\, z_1\}$ и $\boldsymbol{a}_2\{x_2;\, y_2;\, z_2\}$ в ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{i};\boldsymbol{j};\boldsymbol{k}\}$, то скалярное произведение этих векторов и длина вектора $\boldsymbol{a}_1$ вычисляются по формулам:

$$(\boldsymbol{a}_1\bullet\boldsymbol{a}_2) = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3; \qquad |\boldsymbol{a}_1| = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.$$

2. 12. ***Направляющими углами*** луча или вектора $\boldsymbol{m}$ называются углы α, β и γ, которые этот луч (вектор) образует с координатными осями OX, OY и OZ (прямоугольной системы координат) соответственно. Косинусы этих углов (их часто тоже называют ***направляющими***) являются координатами (в ортонормированном базисе) единичного вектора, одинаково направленному с лучом (вектором) $\boldsymbol{m}$, и поэтому удовлетворяют равенству:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1.$$

2. 13. Определителем Грама[9] нескольких векторов $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ – это определитель, составленный из попарных скалярных произведений этих векторов друг на друга:

$$\Gamma(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n) \underset{def}{=} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1^2 & (\boldsymbol{a}_1\bullet\boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1\bullet\boldsymbol{a}_n) \\ (\boldsymbol{a}_2\bullet\boldsymbol{a}_1) & \boldsymbol{a}_2^2 & \cdots & (\boldsymbol{a}_2\bullet\boldsymbol{a}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\boldsymbol{a}_n\bullet\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_n\bullet\boldsymbol{a}_2) & \cdots & \boldsymbol{a}_n^2 \end{vmatrix}.$$

Например, определитель Грама двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен:

$$\Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & (\boldsymbol{a}\bullet b) \\ (\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{a}) & \boldsymbol{b}^2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})^2.$$

---

[8] Слово «нормированный» по отношению к вектору означает «равный по длине единице», а «орто» по-гречески означает «прямой», однако почему-то единичный вектор принято называть ***ортом***, а вектор, перпендикулярный прямой или плоскости – её ***нормалью***, хотя логичней было бы назвать их наоборот.

[9] Грам Й. П. (одно «м»!) – датский математик (1850–1916).

2. 14 Свойство определителя Грама: *Определитель Грама совокупности векторов всегда неотрицателен, и равен нулю тогда и только тогда, когда эти векторы линейно зависимы.*

2.15. Для нахождения ортогональной проекции вектора $\boldsymbol{b}$ на плоскость π надо выбрать в плоскости π два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, тогда $\mathrm{Pr}_{\pi}^{\perp}(\boldsymbol{b}) = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2$, где λ_1 и λ_2 являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1^2 \cdot \lambda_1 + (\boldsymbol{a}_1 \bullet \boldsymbol{a}_2)\cdot \lambda_2 = (\boldsymbol{a}_1 \bullet \boldsymbol{b}), \\ (\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{a}_1)\cdot \lambda_1 + \boldsymbol{a}_2^2 \cdot \lambda_2 = (\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{b}). \end{cases}$$

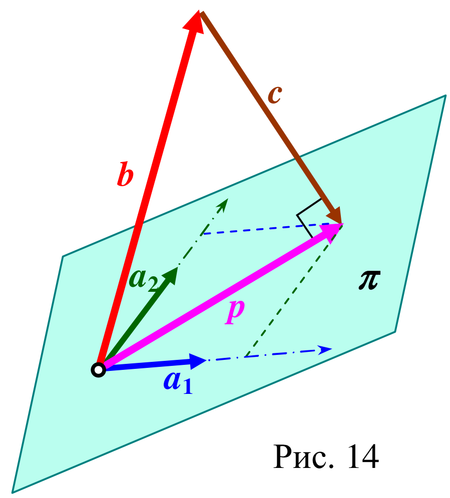


Рис. 14

Главный определитель Δ этой системы есть определитель Грама векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$: $\Delta = \Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, поэтому он строго положителен, и система имеет единственное решение.

Обоснование. Очевидно, что ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на плоскость π – это некоторый вектор $\boldsymbol{p}$ этой плоскости, и поэтому он представим в виде $\boldsymbol{p} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2$, причем, вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{b}$ перпендикулярен плоскости π. (См. Рис. 14). Следовательно, вектор $\boldsymbol{c}$ ортогонален векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, значит,

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a}_1 \bullet \boldsymbol{c}) = 0, \\ (\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{c}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\boldsymbol{a}_1 \bullet (\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b})) = 0, \\ (\boldsymbol{a}_2 \bullet (\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b})) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a}_1^2 \cdot \lambda_1 + (\boldsymbol{a}_1 \bullet \boldsymbol{a}_2)\cdot \lambda_2 - (\boldsymbol{a}_1 \bullet \boldsymbol{b}) = 0, \\ (\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{a}_1)\cdot \lambda_1 + \boldsymbol{a}_2^2 \cdot \lambda_2 - (\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{b}) = 0. \end{cases}$$

Пример 16. Найти координаты вектора $\boldsymbol{m}$ длины 4, образующего с осью OX угол 45°, с осью OY в два раза больший угол, чем с осью OZ.

Решение. Пусть α, β и γ – направляющие углы вектора $\boldsymbol{m}$. По условию, $\alpha = 45°$, $\beta = 2\gamma$. Сразу можно найти первую координату вектора $\boldsymbol{m}$: $x = |\boldsymbol{m}|\cos\alpha = 4\cdot\cos 45° = 2\sqrt{2}$. Поскольку $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ и $\cos^2\gamma = \frac{1}{2}(1+\cos 2\gamma) = \frac{1}{2}(1+\cos\beta)$, получим $\frac{1}{2} + \cos^2\beta + \frac{1}{2}(1+\cos\beta) = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos^2\beta + \frac{1}{2}\cos\beta = 0$, откуда либо $\cos\beta = 0 \Rightarrow \beta = 90° \Rightarrow \gamma = 45°$, либо $\cos\beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 120° \Rightarrow \gamma = 60°$. В первом случае получаем такие вторую и третью координаты вектора $\boldsymbol{m}$: $y = |\boldsymbol{m}|\cos\beta = 4\cos 90° = 0$, $z = |\boldsymbol{m}|\cos\gamma = \cos 45° = 2\sqrt{2}$, а во втором: $y = |\boldsymbol{m}|\cos\beta = 4\cos 120° = -2$, $z = |\boldsymbol{m}|\cos\gamma = 4\cos 60° = 2$.

Ответ: $\boldsymbol{m}_1\{2\sqrt{2}; 0; 2\sqrt{2}\}$, $\boldsymbol{m}_2\{2\sqrt{2}; -2; 2\}$. ■

Пример 17. В треугольнике ABC известны координаты его вершин: $A(3; -1; 2)$, $B(1; 4; 5)$, $C(4; 2; 6)$. Найти косинус угла ABC.

Решение. Угол ABC образован векторами, выходящими из вершины B, т.е. $\overline{BA}(2;-5;-3)$ и $\overline{BC}(3;-2;1)$. Поэтому

$$\cos\angle BAC = \cos(\overline{BA} \wedge \overline{BC}) = \frac{(\overline{BA}\bullet\overline{BC})}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|} =$$

$$= \frac{3\cdot 2 + (-2)\cdot(-5) + 1\cdot(-3)}{\sqrt{9+4+1}\cdot\sqrt{4+25+9}} = \frac{13}{\sqrt{14}\sqrt{38}} = \frac{13}{2\sqrt{133}}$$

Ответ: $\cos\angle ABC = \dfrac{13}{2\sqrt{133}}$. ■

Пример 18. С помощью скалярного произведения доказать следующие теоремы планиметрии:

(а) **теорему косинусов**: квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

(б) **тождество параллелограмма**: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его четырех сторон.

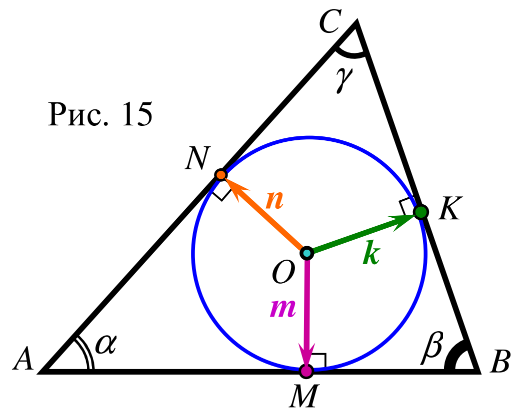
Решение. (а) Пусть в треугольнике ABC угол $\angle ACB = \gamma$, рассмотрим векторы $\boldsymbol{a} = \overline{CA}$ и $\boldsymbol{b} = \overline{CB}$. Тогда $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \gamma$ и $\overline{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Следовательно, $AB^2 = \overline{AB}^2 = (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}) = AC^2 + BC^2 - 2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos\gamma$.

(б) Для параллелограмма $ABCD$ рассмотрим векторы $\overline{AD} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{AB} = \boldsymbol{b}$. Тогда $\overline{AC} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\overline{BD} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ (см. рис. 1), и тогда:

$$AC^2 + BD^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 =$$
$$= \left(\boldsymbol{a}^2 + 2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}^2\right) + \left(\boldsymbol{a}^2 - 2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}^2\right) = 2\left(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2\right) = 2\left(AD^2 + BC^2\right). ■$$

Пример 19. Пусть α, β и γ – внутренние углы треугольника. Доказать, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$. Когда выполняется точное равенство?

Рис. 15



Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$, и точка O – центр окружности радиуса r, вписанной в этот треугольник, и пусть M, N и K – точки касания сторон AB, AC и BC соответственно с этой окружностью (см. Рис. 15). Рассмотрим векторы $\boldsymbol{m} = \overline{OM}$, $\boldsymbol{n} = \overline{ON}$ и $\boldsymbol{k} = \overline{OK}$. Очевидно, что $|\boldsymbol{m}| = |\boldsymbol{n}| = |\boldsymbol{k}| = r$ и $(\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n}) = \angle MON = \;= 180° - \angle MAN = 180° - \alpha$. Аналогично, $(\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{k}) = 180° - \beta$, $(\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{k}) = 180° - \gamma$. Поэтому $(\boldsymbol{m}\bullet\boldsymbol{n}) = -r^2\cos\alpha$, $(\boldsymbol{m}\bullet\boldsymbol{k}) = -r^2\cos\beta$, $(\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{k}) = -r^2\cos\gamma$.

Вспомним, что скалярный квадрат любого вектора, в частности, суммы векторов $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$, неотрицателен:

$$(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k})^2 \geq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{m}^2+\boldsymbol{n}^2+\boldsymbol{k}^2+2(\boldsymbol{m}\bullet\boldsymbol{n})+2(\boldsymbol{m}\bullet\boldsymbol{k})+2(\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{k}) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3r^2-2r^2\cos\alpha-2r^2\cos\beta-2r^2\cos\gamma \geq 0.$$

Сократив на $r^2>0$, немедленно получаем

$$3-2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma) \geq 0,$$

откуда сразу следует требуемое неравенство. Ясно, что точное равенство достигается только когда $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$. Поскольку векторы $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ имеют одинаковую длину, это возможно лишь только когда эти векторы образуют между собой углы по 120°, т.е когда углы α, β и γ равны по 60°. В самом деле:

$$\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{k} \Rightarrow (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})^2=\boldsymbol{k}^2 \Rightarrow \boldsymbol{m}^2+\boldsymbol{n}^2+2(\boldsymbol{m}\bullet\boldsymbol{n})=\boldsymbol{k}^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2r^2-2r^2\cos\alpha=r^2 \Rightarrow \cos\alpha=\tfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha=60°.$$

Аналогично показывается, что $\beta=\gamma=60°$. ■

Пример 20. Доказать, что сумма квадратов всех шести рёбер тетраэдра равна $16(R^2-\rho^2)$, где R – радиус описанной сферы, а ρ – расстояние от центра этой сферы до центроида тетраэдра.

Решение. Пусть точка O – центр сферы радиуса R, описанной около тетраэдра $ABCD$, которую мы возьмем за точку отсчета, M – центроид тетраэдра (см. пример 6), тогда $|OM|=\rho$. Обозначим через $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ радиус-векторы вершин тетраэдра: $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overline{OB}$, $\boldsymbol{c}=\overline{OC}$, $\boldsymbol{d}=\overline{OD}$. Заметим, что $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{d}|=R$. Как мы уже показали в примере 6, $\overline{OM}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$, следовательно,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=4\cdot\overline{OM} \Rightarrow (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})^2=16\cdot\overline{OM}^2=16\rho^2.$$

Очевидно, что

$$\overline{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\ \overline{AC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\ \overline{AD}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a},\ \overline{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b},\ \overline{BD}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b},\ \overline{CD}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}.$$

Поэтому сумма квадратов всех рёбер равна:

$$\textstyle\sum_{\text{кв}}=AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=$$
$$=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})^2$$

Прибавим к последнему равенству $16\rho^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})^2$. Получим

$$\textstyle\sum_{\text{кв}}+16\rho^2=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})^2+$$
$$+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})^2=4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{c}^2+4\boldsymbol{d}^2=4\cdot4R^2=16R^2,$$

поскольку все попарные скалярные произведения взаимно уничтожаются. ■

Пример 21. В тетраэдре $ABCD$ Известны длины всех рёбер: $AB=5$, $AC=6$, $BC=7$, $AD=8, BD=9$ и $CD=10$. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Решение. Рассмотрим векторы $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overline{BC}$, $\boldsymbol{c} = \overline{CD}$ и тождество **2. 9**:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2 + \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2 + 2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}).$$

Здесь $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \overline{AB}+\overline{BC} = \overline{AC}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \overline{BC}+\overline{CD} = \overline{BD}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD} = \overline{AD}$. Подставив в это тождество данные выражения, получим:

$$AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 + 2\left(\overline{AB}\bullet\overline{CD}\right),$$

отсюда

$$\left(\overline{AB}\bullet\overline{CD}\right) = \frac{AD^2+BC^2-AC^2-BD^2}{2} = \frac{64+49-36-81}{2} = -2,$$

Поэтому $\cos\left(\overline{AB}\,\hat{}\,\overline{CD}\right) = \dfrac{\left(\overline{AB}\bullet\overline{CD}\right)}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|} = \dfrac{-2}{5\cdot 10} = -\dfrac{1}{25}$. ■

Пример. 22. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = 5$, $AD = 8$ и угол $\angle BAD = 60°$. Точки E и F расположены на диагоналях AC и BD и делят их в отношении $AE : EC = 3:1$, $BF : FD = 1:2$. Найти длину отрезка EF.

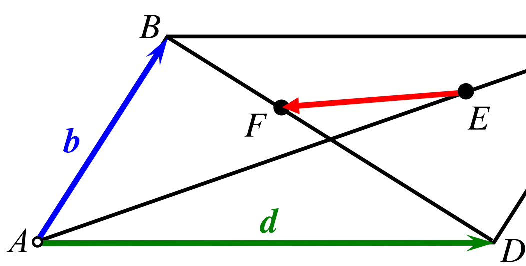


Рис. 16

Решение. Возьмем на плоскости базис $\boldsymbol{b} = \overline{AB}$ и $\boldsymbol{d} = \overline{AD}$. Тогда $\boldsymbol{b}^2 = AB^2 = 25$, $\boldsymbol{d}^2 = AD^2 = 64$, $(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{d}) = 5\cdot 8\cdot\cos 60° = 20$. Теперь разложим по базису вектор $\overline{EF}$ (см. рис. 16). Получим: $\overline{AE} = \frac{3}{4}\overline{AC} = \frac{3}{4}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})$, $\overline{AF} = \frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AD} = \frac{2}{3}\boldsymbol{b} + \frac{1}{3}\boldsymbol{d}$. Поэтому

$$\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = \left(\tfrac{2}{3}\boldsymbol{b} + \tfrac{1}{3}\boldsymbol{d}\right) - \tfrac{3}{4}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}) = -\tfrac{1}{12}\boldsymbol{b} - \tfrac{5}{12}\boldsymbol{d} = -\tfrac{1}{12}(\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{d}).$$

Теперь осталось найти длину этого вектора:

$$|EF| = \left|\overline{EF}\right| = \left|-\tfrac{1}{12}(\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{d})\right| = \left|-\tfrac{1}{12}\right|\cdot\left|(\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{d})\right| = \tfrac{1}{12}\sqrt{(\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{d})^2} =$$

$$= \tfrac{1}{12}\sqrt{\boldsymbol{b}^2 + 10(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{d}) + 25\boldsymbol{d}^2} = \tfrac{1}{12}\sqrt{25+10\cdot 20+25\cdot 64} = \tfrac{5}{12}\sqrt{1+8+64} = \tfrac{5}{12}\sqrt{73}.$$

Ответ: $|EF| = \frac{5}{12}\sqrt{73}$. ■

Пример 23. Плоские углы трехгранного угла равны α, β и γ. Доказать, что $1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma > \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$.

Решение. Рассмотрим три единичных вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, выходящих из вершины трехгранного угла и направленных по его рёбрам. Тогда скалярные квадраты этих векторов равны единице, а попарные скалярные произведения этих векторов равны $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$. Эти три вектора не компланарны и поэтому линейно независимы, следовательно, их определитель Грама строго положителен:

$$\Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}1 & \cos\alpha & \cos\beta\\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma\\ \cos\beta & \cos\gamma & 1\end{vmatrix}>0.$$

Вычислив этот определитель, получаем:

$$\Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma>0,$$

откуда немедленно следует требуемое неравенство. ■

Пример. 24. В тетраэдре $ABCD$ известны длины рёбер, выходящих из одной вершины C и углы между ними: $CA=4$, $CB=5$, $CD=6$, $\angle ACB=60°$, $\angle ACD=\arccos\frac{1}{3}$, $\angle BCD=120°$. Найти: (а) угол между прямыми BC и AD; (б) вектор $\boldsymbol{p}$ – ортогональную проекцию вектора $\overline{CA}$ на плоскость BCD (вектор $\boldsymbol{p}$ разложить по векторам $\overline{CB}$ и $\overline{CD}$).

Решение. Рассмотрим базис, состоящий из векторов $\overline{CA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{CB}=\boldsymbol{b}$, $\overline{CD}=\boldsymbol{d}$ (см. Рис. 17) и составим таблицу скалярных произведений эти векторов друг на друга:

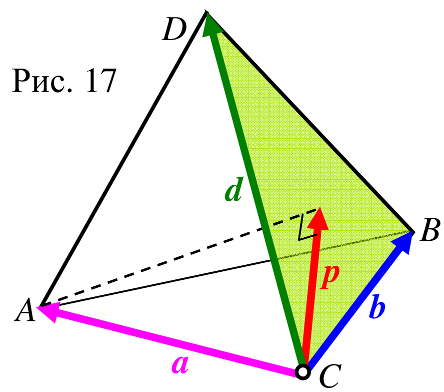


Рис. 17

$\boldsymbol{a}^2=16$, $\boldsymbol{b}^2=25$, $\boldsymbol{d}^2=36$,

$(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})=4\cdot5\cdot\cos60°=10$, $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{d})=4\cdot6\cdot\frac{1}{3}=8$,

$(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{d})=5\cdot6\cdot\cos120°=-15$.

(а) косинус угла β между прямыми CB и AD находится стандартным образом:

$$\cos\beta=\cos(CB\wedge AD)=\left|\cos\left(\overline{CB}\wedge\overline{AD}\right)\right|=\frac{\left|\left(\overline{CB}\bullet\overline{AD}\right)\right|}{\left|\overline{CB}\right|\cdot\left|\overline{AD}\right|}.$$

Вычисляем:

$$\left(\overline{CB}\bullet\overline{AD}\right)=(\boldsymbol{b}\bullet(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}))=(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{a})=-15-10=-25,\ \left|\overline{CB}\right|=|\boldsymbol{b}|=5,$$

$$\left|\overline{AD}\right|=\sqrt{\overline{AD}^2}=\sqrt{(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a})^2}=\sqrt{\boldsymbol{d}^2-2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{d})+\boldsymbol{a}^2}=\sqrt{36-16+16}=6,$$

поэтому $\cos\beta=\dfrac{-25}{5\cdot6}=-\dfrac{5}{6}$.

(б) Ортогональная проекция $\boldsymbol{p}$ вектора $\overline{CA}=\boldsymbol{a}$ на плоскость BCD имеет вид $\boldsymbol{p}=\mathrm{Pr}_{BCD}^{\perp}(\boldsymbol{a})=\lambda\cdot\overline{CB}+\mu\cdot\overline{CD}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{d}$, где коэффициенты λ и μ являются решениями системы линейных уравнений

$$\begin{cases}\boldsymbol{b}^2\lambda+(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{d})\mu=(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{a}),\\ (\boldsymbol{d}\bullet\boldsymbol{b})\lambda+\boldsymbol{d}^2\mu=(\boldsymbol{d}\bullet\boldsymbol{a}),\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25\lambda-15\mu=10,\\ -15\lambda+36\mu=8,\end{cases}$$

Решив эту систему, находим: $\lambda=\dfrac{32}{45}$, $\mu=\dfrac{14}{27}$, следовательно,

$$\boldsymbol{p}=\mathrm{Pr}_{BCD}^{\perp}\left(\overline{CA}\right)=\frac{32}{45}\cdot\overline{CB}+\frac{14}{27}\cdot\overline{CD}.\ ■$$

Задачи для самостоятельного решения к главе 2.

2. 1. Справедливы ли для векторной алгебры следующие формулы:

(а) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3+3(\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b})+3(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^2)+\boldsymbol{b}^3$;

(б) $\boldsymbol{a}^3-\boldsymbol{b}^3=\big((\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}^2)\big)$?

2. 2. Доказать следующие свойства скалярного произведения:

(а) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)$; (б) $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})=\frac{1}{4}\Big((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2\Big)$;

(в) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})^2+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{c}^2+2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})$.

(г) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})^2+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$.

2. 3. Вывести формулу для ортогональной проекции вектора $\boldsymbol{a}\{x;\,y;\,z\}$ на ось с направляющими углами α, β и γ.

2. 4. Найти координаты вектора $\boldsymbol{m}$ длины 3, образующего с координатными осями одинаковые: (а) острые углы; (б) тупые углы.

2. 5. Найти координаты вектора $\boldsymbol{p}$ длины 6, если он образует с осью OZ угол $\arcsin\frac{2}{3}$, а с осью OX в два раза меньший угол, чем с осью OY.

2. 6. Найти направляющие углы луча, выходящего из начала координат, если известно, что он образует с осью OZ угол в два раза меньший, чем с осью OY, и в три раза меньший, чем с осью OX.

2. 7. Первый луч имеет направляющие углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, а второй – $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Найти косинус угла φ между этими лучами.

2. 8. Введем для земного шара прямоугольную систему координат, поместив её начало O в центр Земли, плоскость OXY совместим с экваториальной плоскостью, положительное направление оси OX проведем через гринвичский меридиан, оси OY – через Индийский океан, оси OZ – через Северный полюс. Каждая точка земной поверхности имеет географические координаты $(\theta;\varphi)$, где θ – широта ($-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, положительные значения соответствуют северной широте, отрицательные – южной), φ – долгота ($-\pi<\varphi\le\pi$, положительные значения соответствуют восточной долготе, отрицательные – западной). (а) Выразить декартовы координаты точки M на земном шаре через её географические координаты $(\theta;\varphi)$ и радиус Земли R; (б) найти направляющие косинусы луча OM, где O – центр Земли, а M – точка на земном шаре с географическими координатами $(\theta;\varphi)$.

2. 9. Выразить формулой кратчайшее расстояние по земной поверхности между двумя точками M_1 и M_2 на земном шаре радиуса R с географическими координатами $M_1(\theta_1,\varphi_1)$ и $M_2(\theta_2;\varphi_2)$ (неровностями рельефа пренебречь).

2. 10. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{3;-1;5\}$, $\boldsymbol{b}\{2;5;-2\}$ и $c\{5;3;4\}$. Найти ортогональную проекцию вектора $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

2. 11. Даны векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, причем, $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=5$, $|\boldsymbol{c}|=8$, $(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})=\arccos\frac{1}{3}$, $(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c})=60°$, $(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})=120°$. Найти ортогональную проекцию вектора $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

2. 12. В треугольнике ABC известны координаты его вершин: $A(1;4;3)$, $B(3;1;4)$, $C(2;3;5)$. Найти: (а) косинус угла при вершине C; (б) ортогональную проекцию $\boldsymbol{p}$ вектора $\boldsymbol{m}\{3;-2;2\}$ на плоскость ABC.

2. 13. С помощью скалярного произведения доказать следующие теоремы планиметрии:

(а) свойство диагоналей прямоугольника;

(б) свойство диагоналей ромба;

(в) теорему о пересечении трех высот треугольника (или их продолжений)

(г) если α, β, γ – внутренние углы плоского треугольника, то $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2}$. В каком случае достигается точное равенство?

2. 14. Пусть H – ортоцентр (точка пересечения высот или их продолжений) треугольника, вписанного в окружность с центром в точке O. Доказать, что $\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$.

2. 15. Около треугольника ABC описана окружность радиуса R, H – точка пересечения его высот. Доказать, что $AH^2+BC^2=4R^2$.

2. 16. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC. Доказать, что $\left(\overline{HA}\bullet\overline{HB}\right)=\left(\overline{HB}\bullet\overline{HC}\right)=\left(\overline{HC}\bullet\overline{HA}\right)$.

2. 17. Доказать, что точка M пересечения медиан треугольника лежит на отрезке, соединяющим центр описанной окружности O и ортоцентр H, и делит этот отрезок в отношении $OM:MH=1:2$.

2. 18. Пусть O – центр окружности радиуса R, описанной около треугольника, стороны которого равны a, b, c, H – его ортоцентр, M – точка пересечения медиан. Доказать, что:

(1°) $OH^2+a^2+b^2+c^2=9R^2$; (2°) $a^2+b^2+c^2=9(R^2-OM^2)$.

2. 19. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC, O – произвольная точка. Доказать формулу Лейбница:

$$OM^2=\frac{1}{3}\left(OA^2+OB^2+OC^2\right)-\frac{1}{9}\left(AB^2+BC^2+AC^2\right).$$

2. 20. Пусть M – середина отрезка, соединяющего середины рёбер AB и CD тетраэдра $ABCD$, O – произвольная точка. Доказать, что сумма квадратов всех рёбер тетраэдра равна

$$4\cdot\left(OA^2+OB^2+OC^2+OD^2\right)-16\cdot OM^2.$$

2. 21. Найти вектор $\boldsymbol{r}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\boldsymbol{p}(4;-7;-4)$ и $\boldsymbol{q}(-1;2;2)$, если $|\boldsymbol{r}|=4\sqrt{6}$.

2. 22. При каком значении λ векторы $\boldsymbol{a}\{1;2;\lambda\}$ и $\boldsymbol{b}\{-1;1;4\}$: (а) ортогональны; (б) образуют угол 45°?

2. 23. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ такие, что $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=3$, $(\boldsymbol{a}\,\hat{}\,\boldsymbol{b})=60°$. При каком значении λ векторы $\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$: (а) ортогональны; (б) образуют угол $\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)$?

2. 24. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=1$ и $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})^2=28$.

2. 25. Доказать, что сумма квадратов медиан любого треугольника составляет $3/4$ от суммы квадратов его сторон.

2. 26. Даны два вектора $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, причем длина вектора $\boldsymbol{p}$ в k раз больше длины вектора $\boldsymbol{q}$, $|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}|=m$ и $|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|=n$. Найти косинус угла между векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$.

2. 27. Найти $|5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|$, если $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=3$, и $|3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=5$.

2. 28. Найти угол при вершине A треугольника ABC, если сторона AB в полтора больше стороны AC, а медианы, проведенные к этим сторонам, перпендикулярны.

2. 29. Найти косинус угла, образованный медианами, проведенными из вершин острых углов прямоугольного треугольника, катеты которого относятся как $2:3$.

2. 30. Каким условиям должны удовлетворять векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, чтобы имели место соотношения: (а) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$; (б) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$; (в) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$?

2. 31. При каком взаимном расположении ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ справедливо равенство $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})$?

2. 32. Центр окружности на плоскости совпадает с точкой пересечения медиан треугольника, лежащего в этой плоскости. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до всех вершин треугольника постоянна.

2. 33. Центр окружности на плоскости совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелограмма, лежащего в этой плоскости. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до всех вершин параллелограмма постоянна.

2. 34. На плоскости даны треугольник ABC и точка O. Чем для треугольника ABC является точка O, если:

(а) $|\overline{OA}|=|\overline{OB}|=|\overline{OC}|$;

(б) $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\boldsymbol{0}$;

(в) $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\overline{OB}\cdot\overline{OC}=\overline{OC}\cdot\overline{OA}$;

(г) $|AB|\cdot\overline{OC}+|BC|\cdot\overline{OA}+|AC|\cdot\overline{OB}=\boldsymbol{0}$?

2. 35. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны AB = 3, BC = 5. На диагоналях AC и BD выбраны точки E и F так, что $AE:EC=3:1$, $BF:FD=2:1$, а прямые AF и DE перпендикулярны. Найти косинус угла BAD.

2. 36. В треугольнике ABC известны стороны AB = 9, AC = 12. Точка K – середина медианы BD, а точка M делит медиану CE в отношении $CM:ME=1:2$. Расстояние между точками M и K равно 4. Найти угол BAC.

2. 37. На плоскости даны векторы $\boldsymbol{a}(3;\ 1)$ и $\boldsymbol{b}(-2;\ 5)$. Найти на плоскости вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий условиям: (а) $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{x})=9$, $|\boldsymbol{x}|=5$; (б) $(\boldsymbol{a}\bullet x)=5,\ (\boldsymbol{b}\bullet x)=8$. (в) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{x},\ (\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{x})=34$; (г)$\cdot\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{x},\ |\boldsymbol{x}|=4$.

2. 38. На плоскости даны неколлинеарные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а также числа p и q. Найти в этой плоскости вектор $\boldsymbol{x}$ такой, что $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{x})=p$, $(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{x})=q$ (разложить вектор $\boldsymbol{x}$ по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$).

2. 39. Три ненулевых вектора образуют между собой углы, косинусы которых равны x, y и z. При каком соотношении между x, y и z эти три вектора компланарны?

2. 40. Доказать что для любых трех ненулевых векторов плоскости, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ справедливо неравенство:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|.$$

2. 41. Доказать, что для любых ненулевых векторов $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ пространства имеет место неравенство

$$|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}|+|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}|+|\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}|\le|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|+|\boldsymbol{r}|+|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}|.$$

2. 42. С помощью скалярного произведения доказать следующие теоремы стереометрии:

(а) квадрат любой диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

(б) сумма квадратов всех четырех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его 12 рёбер.

(в) если в тетраэдре $ABCD$ $AB\perp CD$ и $AC\perp BD$, то и $AD\perp BC$.

(г) сумма квадратов всех шести рёбер произвольного тетраэдра, вписанного в сферу радиуса R, не превосходит $16R^2$. В каком случае достигается точное равенство?

(д) сумма косинусов двугранных углов при всех шести рёбрах тетраэдра не превосходит 2. В каком случае достигается точное равенство?

(е) два отрезка AB и CD (на плоскости или в пространстве) перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2.$$

(ж) центр описанной сферы тетраэдра совпадает с его центроидом тогда и только тогда, когда его противоположные рёбра попарно равны;

(з) длина медианы тетраэдра, выходящей из некоторой его вершины, меньше одной трети суммы трех его рёбер, выходящих из этой же вершины;

(и) отрезок, соединяющий середины двух противоположных рёбер тетраэдра меньше одной четвертой суммы остальных его четырех рёбер.

2. 43. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Доказать, что: (а) все четыре высоты тетраэдра (или их продолжения) пересекаются в одной точке (ортоцентре H); (б) точка M пересечения медиан тетраэдра является серединой отрезка, соединяющего ортоцентр H и центр описанной сферы O.

2. 44. Доказать, что для любых четырех точек в пространстве A, B, C и D выполняется равенство $\left(\overline{AB}\bullet\overline{CD}\right)+\left(\overline{AC}\bullet\overline{DB}\right)+\left(\overline{AD}\bullet\overline{BC}\right)=0$.

2. 45. Центр сферы совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелепипеда. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки сферы до всех вершин параллелепипеда постоянна.

2. 46. Центр сферы совпадает с точкой пересечения медиан тетраэдра. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки сферы до всех вершин тетраэдра постоянна.

2. 47. Записать и вычислить определитель Грама совокупности векторов:

(а) $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, где $|\boldsymbol{a}|=3,\ |\boldsymbol{b}|=4,\ (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})=60°$;

(б) $\boldsymbol{a}\{2;-5\}$, $\boldsymbol{b}\{3;7\}$;

(в) $\boldsymbol{a}\{3;-1;4\}$, $\boldsymbol{b}\{2;3;-1\}$ и $\boldsymbol{c}\{2;5;3\}$.

(г) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, где $|\boldsymbol{a}|=3,\ |\boldsymbol{b}|=4,\ |c|=5, (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})=60°,\ (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c})=90°,$ $(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})=120°$.

2. 48. Чему равен определитель Грама произвольных n **геометрических** векторов[10] при $n\geq 4$?

2. 49. Как изменится определитель Грама совокупности векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, если:

(а) переставить местами два вектора;

(б) один из векторов умножить на число λ;

(в) один из векторов заменить суммой этого вектора с каким-либо другим вектором этой совокупности;

(г) один из векторов заменить суммой этого вектора и линейной комбинации других векторов этой совокупности.

2. 50. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ **–** некоторые векторы, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ **–** произвольные числа, $\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{p}_2=\lambda_2\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{p}_3=\lambda_3\boldsymbol{a}+\mu_3\boldsymbol{b}$. Вычислить определитель Грама векторов $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$.

2. 51. В тетраэдре $ABCD$ известны длины рёбер, выходящие из одной вершины и углы между ними: $AB=2$, $BC=3$, $BD=4$, $\angle ABC=60°$,

[10] В этом пособии все рассматриваемые векторы геометрические. Но в курсе линейной алгебры, которую вы будете изучать в следующем семестре, определитель Грама можно составить не только из геометрических векторов, но и из любых «векторов» (т.е. элементов) Евклидова пространства, и тогда ответ в этой задаче будет другим.

$\angle ABD = \arccos\frac{1}{4}, \angle CBD = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. Точки M и N расположены на рёбрах BC и AD соответственно и делят их в отношении $BM:MC = 2:1$, $AN:ND = 1:3$. Найти: (а) длину отрезка MN; (б) косинус угла между прямыми AC и BD.

2. 52. Векторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ удовлетворяют условию $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$, причем $|\boldsymbol{p}|=\alpha$, $|\boldsymbol{q}|=\beta$, $|\boldsymbol{r}|=\gamma$. Вычислить $(\boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{q})+(\boldsymbol{q}\bullet\boldsymbol{r})+(\boldsymbol{r}\bullet\boldsymbol{p})$.

2. 53. В пространстве даны некомпланарные единичные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, образующие между собой углы $(\boldsymbol{b}\,^\wedge\boldsymbol{c})=\alpha, (\boldsymbol{a}\,^\wedge\boldsymbol{c})=\beta, (\boldsymbol{a}\,^\wedge\boldsymbol{b})=\gamma$, а также числа m, n и k. Вектор $\boldsymbol{d}$ таков, что $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{d})=m$, $(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{d})=n$, $(\boldsymbol{c}\bullet\boldsymbol{d})=k$. Разложить вектор $\boldsymbol{d}$ по векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

2. 54. В тетраэдре $ABCD$ даны длины всех его ребер: $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $AD=d$, $BD=e$, $CD=f$. Найти косинус угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

2. 55. В тетраэдре $ABCD$ ребра AC и BD перпендикулярны, $AB=5,\ AD=6,\ BC=7$. Найти длину ребра CD.

2. 56. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AB=3,\ AD=5,\ AA_1=2$, диагоналей боковых граней $AC=7,\ AB_1=4,\ AD_1=6$. Найти длину диагонали AC_1.

2. 57. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины диагоналей граней $AB_1=9$, $A_1D=5$, диагонали $B_1D=7$ и ребра $AA_1=3$. Найти скалярное произведение $\left(\overline{AB}\bullet\overline{AD}\right)$.

2. 58. Точки M и N – середины рёбер AB и CD тетраэдра $ABCD$. Доказать, что $4MN^2 = AC^2 + BC^2 + BD^2 + AD^2 - AB^2 - CD^2$.

2. 59. Доказать, что во всяком тетраэдре (или четырехугольнике) $ABCD$ выполняется неравенство:

$AC^2 + BD^2 \le AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$. В каком случае достигается точное равенство?

2. 60. Дан параллелограмм $ABCD$. Его вершины A, B и C лежат на сфере радиуса R с центром O. Доказать, что

$$|OD|^2 = R^2 + |AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2.$$

2. 61. Дан трехгранный угол. Доказать, что (а) биссектрисы трех углов, смежных с его плоскими углами, лежат в одной плоскости; (б) если биссектрисы двух плоских углов угла перпендикулярны, то биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна каждой из них.

2. 62. Доказать, что если длины трех отрезков, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, равны, то эти пары противоположных ребер тетраэдра перпендикулярны.

2. 63. Доказать, что если общие перпендикуляры противоположных ребер тетраэдра проходят через середины этих ребер, то противоположные ребра попарно равны.

2. 64. Из точки в пространстве выходят четыре луча. Углы, образованные каждыми двумя лучами, равны φ. Найти угол φ.

2. 65. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы трехгранного угла с вершиной D – прямые, DH – высота тетраэдра. Разложить вектор $\overline{DH}$ по векторам $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ и $\overline{DC}$, если известно, что $|DA| = a$, $|DB| = b$ $|DC| = c$.

2. 66. Из одной точки в пространстве выходят четыре луча, образующие между собой шесть углов. Доказать, что сумма косинусов этих углов не меньше (–2).

2. 67. Дан прямоугольник $ABCD$. Доказать, что сумма квадратов расстояний от любой точки до пространства до вершин A и C равна сумме квадратов ее расстояний до вершин B и D.

2. 68. Около треугольника ABC описана окружность. Прямая, содержащая медиану CK треугольника, пересекает окружность вторично в точке D. Доказать, что $AC^2 + BC^2 = 2 \cdot CK \cdot CD$.

2. 69. Тетраэдр $ABCD$ вписан в сферу. Прямая, проходящая через вершину D и точку M – точку пересечения медиан грани ABC – пересекает сферу вторично в точке E. Доказать, что

$$AD^2 + BD^2 + CD^2 = 3 \cdot DM \cdot DE.$$

2. 70. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2 и 3 и направленные по диагоналям граней куба, проходящим через эту вершину. Найти величину равнодействующей этих трех сил.

2. 71. Противоположные рёбра тетраэдра $ABCD$ попарно равны: $AB = CD = 5,\ AC = BD = 6,\ AD = BC = 7$. К одной из вершин тетраэдра приложены три силы, направленные по рёбрам, выходящим из этой вершины, и равные по величине длинам этих рёбер. Найти величину равнодействующей этих трех сил.

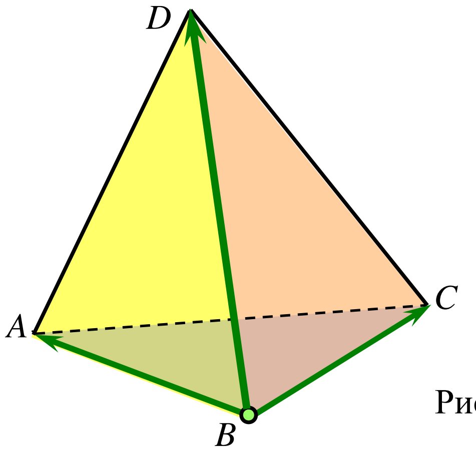
2. 72. Противоположные рёбра тетраэдра попарно равны. Доказать, найдется прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, такой, что данный тетраэдр есть тетраэдр AB_1CD_1, образованный диагоналями граней параллелепипеда.

2. 73. Противоположные рёбра тетраэдра попарно перпендикулярны. Доказать, что найдется ромбоэдр (параллелепипед с равными рёбрами) $ABCDA_1B_1C_1D_1$, такой, что данный тетраэдр есть тетраэдр AB_1CD_1, образованный диагоналями граней параллелепипеда.

3. Векторное и смешанное произведения векторов

3.1 Геометрическая ориентация упорядоченной тройки некомпланарных векторов. Пусть даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Говорят, что эти векторы образуют ***правую*** (***левую***) тройку, если, отложив их от общего начала: $\boldsymbol{a} = \overline{OA},\ \boldsymbol{b} = \overline{OB},\ \boldsymbol{c} = \overline{OC}$, и наблюдая за их концами из этого начала, мы обходим их в указанном порядке $A \to B \to C \to A$ по часовой стрелке (соответственно против часовой стрелки).

Геометрическую ориентацию можно также объяснить с помощью винта. Для понимания надо представлять себе, что если вращать головку винта (шурупа, буравчика) со стороны наблюдателя по часовой стрелке с целью ввинтить его куда-либо, то винт (шуруп, буравчик) получит поступательное движение перпендикулярно плоскости вращения в сторону от наблюдателя.



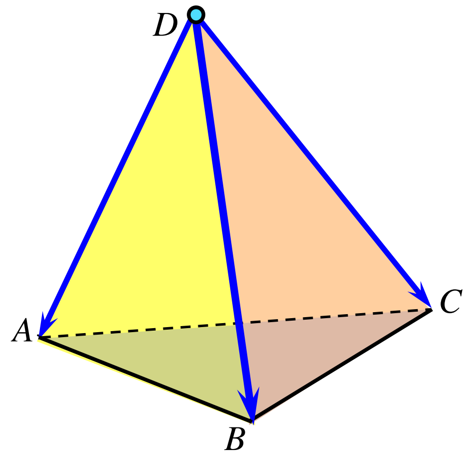


Рис. 18

Альтернативное определение. Упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ является ***правой*** (***левой***), если, вращая головку винта в плоскости первых двух векторов в направлении наименьшего угла от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$, сам винт получит поступательное движение перпендикулярно этой плоскости, образующее острый (соответственно тупой) угол с третьим вектором $\boldsymbol{c}$.

Из определения следует, что если упорядоченная тройка векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ – правая, то тройка $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$ – тоже правая, а тройка $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ – левая. Например, на рис. 18 в тетраэдре $ABCD$ тройка векторов $\overline{BA}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$ (в указанном порядке!) – правая, а тройка $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ – левая.

3.2. ***Векторным произведением*** двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (в указанном порядке) называется вектор $\boldsymbol{c}$, обозначаемый (в разных книгах) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]$ (в данном пособии принято последнее обозначение) и такой что:

(а) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны;

(б) если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, его длина равна произведению длин векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на синус угла между ними: $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$, и векторы $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ образуют правую тройку. Последнее означает, что если вращать головку винта в плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, по направлению от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ по наименьшему углу, то винт получит поступательное движение в направлении вектора $\boldsymbol{c}$.

3.3. Механические приложения векторного произведения.

(а) **вращательное движение.** Напомним, что в механике угловая скорость – это вектор, длина которого равна величине угловой скорости, а направление совпадает с осью вращения. При вращении твердого тела с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси, проходящей через точку отсчета O, произвольная точка A этого тела будет иметь линейную скорость $\boldsymbol{v}$, связанную с угловой скоростью соотношением: $\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{\omega}\times\overline{OA}]$.

(б) **момент силы.** Если к точке A приложит силу $\boldsymbol{f}$ (которая есть вектор!), то векторный момент $\boldsymbol{m}$ этой силы относительно точки отсчета O равен

$$\boldsymbol{m}=[\overline{OA}\times\boldsymbol{f}\,].$$

3.4. Геометрические приложения.

(а) **Площадь параллелограмма**, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, равна модулю (т.е. длине) их векторного произведения: $S_{\text{параллелогр}}=\left|[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,]\right|$;

(б) Площадь треугольника построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, равна половине длины их векторного произведения, в частности, площадь треугольника ABC равна $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|[\,\overline{AB}\times\overline{AC}\,]\right|$.

3.5. Алгебраические свойства векторного произведения

(верные для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и числа $\lambda\in\mathbb{R}$):

(а) $[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,]=-[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\,]$;

(б1) $[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\,]=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,]+[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\,]$;

(б2) $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c})\,]=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\,]+[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\,]$;

(в) $[\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,]=[\boldsymbol{a}\times\lambda\boldsymbol{b}\,]=\lambda[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,]$;

(г) $[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}\,]=\boldsymbol{0}$.

3.6. Если известны координаты векторов $\boldsymbol{a}_1\{x_1;\,y_1;\,z_1\}$ и $\boldsymbol{a}_2\{x_2;\,y_2;\,z_2\}$ в ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{i};\boldsymbol{j};\boldsymbol{k}\}$, то векторное произведение этих векторов вычисляется по формуле:

$$[\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\{(y_1z_2-y_2z_1);(z_1x_2-z_2x_1);(x_1y_2-x_2y_1)\}.$$

3.7. Формула двойного векторного произведения. Для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ справедлива формула

$$[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]]=(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

Замечание. Эту формулу иногда записывают в виде $[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]]=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})$ и шутливо называют ***формулой « БАЦ – ЦАБ».***

3.8. Векторное и скалярное произведения двух векторов связаны определителем Грама:

$$\Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\equiv\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}^2 & (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})\\ (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}) & \boldsymbol{b}^2\end{vmatrix}=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]^2.$$

3.9. Для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ справедливо равенство

$$(\boldsymbol{a}\bullet[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}])=([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\bullet\boldsymbol{c}).$$

Смешанным произведением трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (в указанном порядке) называется число, обозначаемое $\boldsymbol{abc}$ или $(\boldsymbol{abc})$ и равное любому из вышеуказанных выражений, т.е.

$$(\boldsymbol{abc})\underset{def}{=}(\boldsymbol{a}\bullet[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}])=([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\bullet\boldsymbol{c}).$$

3.10. Алгебраические свойства смешанного произведения.

(а) смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов: $(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca}) = (\boldsymbol{cab})$;

(б) смешанное произведение меняет знак на противоположный при перестановке местами двух векторов: $(\boldsymbol{abc}) = -(\boldsymbol{bac}) = -(\boldsymbol{cba}) = -(\boldsymbol{acb})$;

(в) смешанное произведение **линейно** по каждому из трех своих множителей, это значит, что для любых чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$:

(1°) $((\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{bc}) = \lambda_1(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{bc}) + \lambda_2(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{bc})$,

(2°) $(\boldsymbol{a}(\lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \lambda_2\boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{c}) = \lambda_1\cdot(\boldsymbol{ab}_1\boldsymbol{c}) + \lambda_2\cdot(\boldsymbol{ab}_2\boldsymbol{c})$,

(3°) $(\boldsymbol{ab}(\lambda_1\boldsymbol{c}_1 + \lambda_2\boldsymbol{c}_2)) = \lambda_1(\boldsymbol{abc}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{abc}_2)$;

(г) $(\boldsymbol{abc}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны;

(д) $(\boldsymbol{abc}) > 0$ ($(\boldsymbol{abc}) < 0$) тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ образуют правую (соответственно левую) тройку.

Замечание. Из свойства (г) следует, что смешанное произведение трех векторов, два из которых равны или пропорциональны, равно нулю, например: $(\boldsymbol{abb}) = (\boldsymbol{bab}) = (\boldsymbol{aab}) = 0$.

3.11. Геометрическое приложение смешанного произведения:

(а) объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, равен абсолютной величине их смешанного произведения:

$$V_{\text{параллелепип}} = |(\boldsymbol{abc})|;$$

(б) объем тетраэдра, построенного на трех некомпланарных векторах, равен одной шестой абсолютной величины их смешанного произведения, в частности, объем тетраэдра $ABCD$ равен:

$$V_{ABCD} = \tfrac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right)\right|;$$

(в) четыре точки A, B, C и D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\left(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right) = 0$.

3.12. Если известны координаты векторов $\boldsymbol{a}_1\{x_1; y_1; z_1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{x_2; y_2; z_2\}$ и $\boldsymbol{a}_3\{x_3; y_3; z_3\}$ в ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}; \boldsymbol{k}\}$, то их смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$(\boldsymbol{abc}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

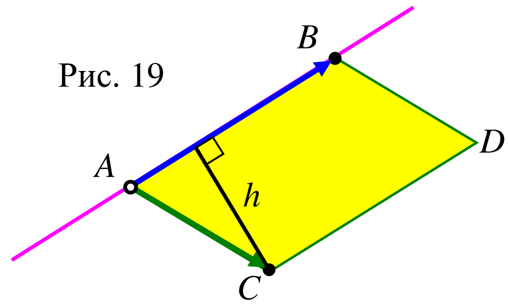
3.13. Смешанное и скалярное произведения трех векторов связаны определителем Грама: $\Gamma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{a}) & \boldsymbol{b}^2 & (\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{c}\bullet\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c}\bullet\boldsymbol{b}) & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix} = (\boldsymbol{abc})^2$.

3.14. Пусть в пространстве даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Тогда расстояние от точки C до прямой AB вычисляется по формуле:

$$\rho(C, AB) = \frac{|[\overline{AB} \times \overline{AC}]|}{|AB|}.$$

Обоснование. Рассмотрим параллелограмм $ABDC$, построенный на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, его площадь равна произведению стороны AB на высоту h опущенной из точки C на прямую AB. (см. Рис. 19). Искомое расстояние как раз и равно высоте h:

Рис. 19



$$\rho(C, AB) = h = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{|[\overline{AB} \times \overline{AC}]|}{|\overline{AB}|}.$$

3.15. Пусть в пространстве даны четыре точки A, B, C и D, не лежащие в одной плоскости. Тогда расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD вычисляется по формулам:

$$\rho(AB, CD) = \frac{|(\overline{AB}\,\overline{CD}\,\overline{AC})|}{|[\overline{AB} \times \overline{CD}]|}; \qquad \text{(а)}$$

$$\rho(AB, CD) = \sqrt{\frac{\Gamma(\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{AC})}{\Gamma(\overline{AB}, \overline{CD})}}. \qquad \text{(б)}$$

Обоснование. Построим параллелепипед, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, G и H. Этот параллелепипед построен на векторах $\boldsymbol{a} = \overline{AB} = \overline{FE} = \overline{CG} = \overline{DH}$, $\boldsymbol{b} = \overline{AF} = \overline{BE} = \overline{CD} = \overline{GH}$ и $\boldsymbol{c} = \overline{AC} = \overline{FD} = \overline{BG} = \overline{EH}$. (см. Рис. 20). Как известно из курса стереометрии, расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной прямой до плоскости, проходящей через другую прямую параллельно первой прямой. В нашем случае искомое расстояние равно расстоянию от любой точки прямой CD (например, от точки C) до плоскости, проходящей через прямую AB параллельно CD, т.е. плоскости $ABEF$. Это расстояние равно высоте h параллелепипеда $ABEFCGHD$, опущенной на плоскость грани $ABEF$, которая, в свою очередь, равна отношению объема этого параллелепипеда, (равного абсолютной величине смешанного произведения векторов, на которых он построен: $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overline{CD}$ и $\boldsymbol{c} = \overline{AC}$) к площади параллелограмма $ABEF$ (равного модулю векторного произведения векторов $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$ и $\boldsymbol{b} = \overline{CD}$). Следовательно, искомое расстоя-

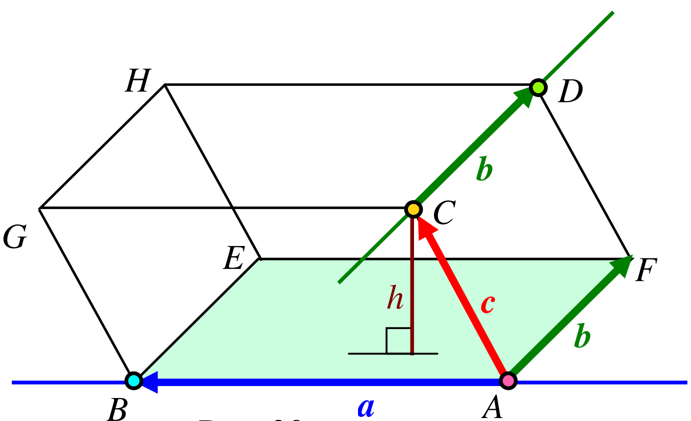


Рис. 20

ние равно

$$\rho(AB, CD) = h = \frac{V_{ABCDEFGH}}{S_{ABEF}} = \frac{|(\boldsymbol{abc})|}{|[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]|} = \frac{|(\overline{AB}\,\overline{CD}\,\overline{AC})|}{|[\overline{AB}\times\overline{CD}]|}.$$

Применяя формулы (3.8) и (3.13), выражающие модуль векторного и смешанного произведений через определитель Грама, получим и вторую формулу 3.15(б).

Замечание. Первую формулу 3.15(а) целесообразно применять, когда векторное и смешанное произведение можно вычислить непосредственно, например, если известны координаты векторов $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overline{CD}$ и $\boldsymbol{c} = \overline{AC}$ в ортонормированном базисе. Вторую формулу 3.15(б) желательно применять тогда, когда векторное и смешанное произведения непосредственно найти затруднительно, например, если известны только длины векторов $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overline{CD}$, $\boldsymbol{c} = \overline{AC}$ и углы между ними.

3.16. Пусть в пространстве даны четыре точки *A*, *B*, *C* и *D*, не лежащие в одной плоскости. Тогда расстояние от точки *D* до плоскости, проходящей через три другие точки *A*, *B* и *C*, вычисляется по формулам:

$$\rho(D, ABC) = \frac{|(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD})|}{|[\overline{AB}\times\overline{AC}]|}; \tag{а}$$

$$\rho(D, ABC) = \sqrt{\frac{\Gamma(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})}{\Gamma(\overline{AB}, \overline{AC})}}. \tag{б}$$

Обоснование. Искомое расстояние равно высоте h_D тетраэдра *ABCD*, опущенной из вершины *D* на плоскость *ABC* (см. Рис. 21). Поскольку объем пирамиды, в частности, тетраэдра, равен одной трети произведения площади основания на высоту, то высота h_D, в свою очередь, равна $h_D = \dfrac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}$. Подставляя сюда выражения для объема тетраэдра и площади треугольника через смешанное и векторное произведения (3.11) и (3.4), получим первую формулу (3.16(а)):

$$\rho(D, ABC) = h_D = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3\cdot\frac{1}{6}|(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD})|}{\frac{1}{2}|[\overline{AB}\times\overline{AC}]|} = \frac{|(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD})|}{|[\overline{AB}\times\overline{AC}]|}.$$

Вторая формула получается, если подставить выражения связи векторного и смешанного произведений с определителем Грама.

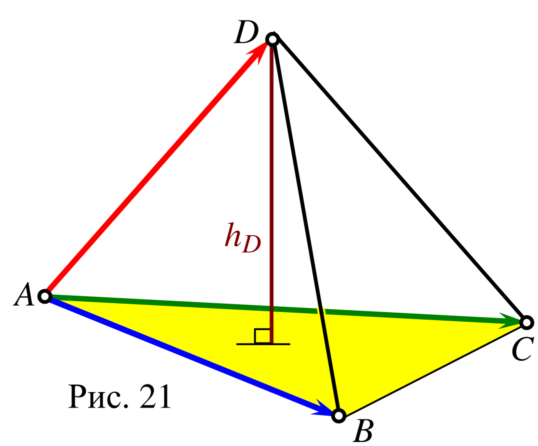


Рис. 21

Замечание. Если $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overline{CD}$ и $\boldsymbol{c} = \overline{AC}$, то $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}$, и тогда

$$(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}) = (\boldsymbol{ac}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})) =$$
$$= (\boldsymbol{acc}) + (\boldsymbol{acb}) = 0 - (\boldsymbol{abc}) =$$
$$= -(\overline{AB}\,\overline{CD}\,\overline{AC}),$$

но абсолютные величины этих смешанных произведений равны: $\left|\left(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right)\right| = \left|\left(\overline{AB}\,\overline{CD}\,\overline{AC}\right)\right|$.

Пример 25. В пространстве даны три точки $A(-2;2;3)$, $B(2;-1;5)$ и $C(-1;4;1)$. Найти координаты единичного вектора, перпендикулярного плоскости *ABC*.

Решение. Вектор $\boldsymbol{n}_{ABC} = [\overline{AB} \times \overline{AC}]$ перпендикулярен векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а значит, и плоскости *ABC*. Находим: $\overline{AB}\{4;-3;2\}$, $\overline{AC}\{1;2;-2\}$,

$$\boldsymbol{n}_{ABC} = [\overline{AB} \times \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k}.$$

Однако этот вектор не единичный: $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{4+100+121} = 15$. Нормируем его, разделив на его длину. Искомых векторов два, они противоположны друг другу: $\boldsymbol{n}_0 = \pm\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\cdot\boldsymbol{n} = \pm\frac{1}{15}\{2;10;11\} = \pm\{\frac{2}{15};\frac{2}{3};\frac{11}{15}\}$.

Ответ: $\boldsymbol{n}_{01}\left\{\frac{2}{15};\frac{2}{3};\frac{11}{15}\right\}$ и $\boldsymbol{n}_{02}\left\{-\frac{2}{15};-\frac{2}{3};-\frac{11}{15}\right\}$.■

Пример 26. Про векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ известно, что $|\boldsymbol{p}| = 5$, $|\boldsymbol{q}| = 4$, $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) = 150°$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{p} - 7\boldsymbol{q}$.

Решение. Площадь искомого треугольника равна половине модуля векторного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: $S_\Delta = \frac{1}{2}|[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]|$. Сначала вычислим векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}] &= [(3\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q})\times(4\boldsymbol{p}-7\boldsymbol{q})] = \\ &= 12[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}] + 8[\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}] - 21[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}] - 14[\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{q}] = \\ &= \boldsymbol{0} - 8[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}] - 21[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}] - \boldsymbol{0} = -29[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_\Delta = \tfrac{1}{2}|[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]| = \tfrac{1}{2}|-29[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}]| = \tfrac{1}{2}\cdot 29|[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}]| = \tfrac{1}{2}\cdot 29|\boldsymbol{p}|\cdot|\boldsymbol{q}|\cdot\sin(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot 29\cdot 5\cdot 4\cdot\sin 150° = 290\cdot\tfrac{1}{2} = 145.\ ■$$

Пример 27. Даны три вектора $\boldsymbol{a}\{-3;2;4\}$, $\boldsymbol{b}\{1;3;-2\}$ и $\boldsymbol{c}\{5;4;-1\}$. Найти повторное векторное произведение $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]]$ двумя способами: (а) непосредственно; (б) по формуле «БАЦ-ЦАБ».

Решение. (а) сначала найдем

$$\boldsymbol{d} = [\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 5\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} - 11\boldsymbol{k} \Rightarrow \boldsymbol{d}\{5;-9;-11\};$$

затем вычислим $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]] = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 2 & 4 \\ 5 & -9 & -11 \end{vmatrix} = 14\boldsymbol{i} - 13\boldsymbol{j} + 17\boldsymbol{k}.$

(б) Вычислим скалярные произведения: $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c}) = -15+8-4 = -11$, $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}) = -3+6-8 = -5$. Поэтому

$$\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]] = (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = -11\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c} =$$
$$= -11\{1;3;-2\}+5\{5;4;-1\} = \{14;-13;17\}.$$

Ответ: $\boldsymbol{p}\{14;-13;17\}$.■

Пример 28. В трапеции *ABCD*, у которой основание *AD* втрое больше основания *BC*, известны координаты вершин $A(2;4;1)$, $B(-1;3;5)$ и точки пересечения диагоналей $E(-4;7;10)$. Найти координаты вершин *C*, *D* и площадь трапеции.

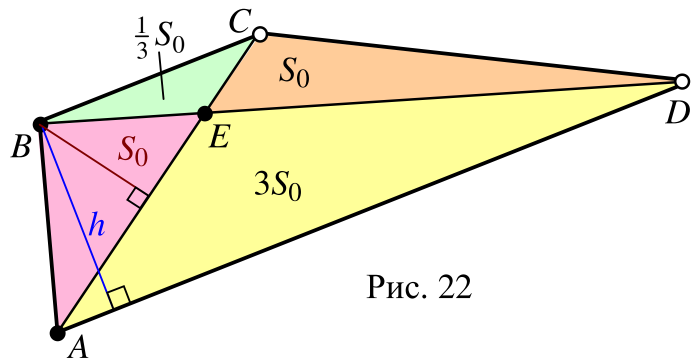


Рис. 22

Решение. Как известно из курса планиметрии, диагонали *AC* и *BD* трапеции *ABCD* с основаниями *BC* и *AD* делят её на четыре треугольника (см. рис. 22), из которых два равновелики (имеют одинаковую площадь): $S_{\Delta ABE} = S_{\Delta CDE}$, а другие два подобны: $\Delta ADE \backsim \Delta CBE$, поэтому $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{DE}{EB} = \dfrac{AD}{BC} = 3$. Следовательно, точка *E* делит отрезок *AC* в отношении $AE:EC = 3:1$, поэтому, $x_E = \frac{1}{4}(x_A+3x_C)$, откуда

$x_C = \frac{1}{3}(4x_E - x_A) = \frac{1}{3}(4\cdot(-4)-2) = -6$. Аналогично,

$y_C = \frac{1}{3}(4y_E - y_A) = \frac{1}{3}(4\cdot 7-4) = 8$ и $z_C = \frac{1}{3}(4z_E - z_A) = \frac{1}{3}(4\cdot 10-1) = 13$, следовательно, точка *C* имеет координаты $C(-6;8;13)$.

Далее, $BE:ED = 1:3$, следовательно, $x_E = \frac{1}{4}(3x_B + x_D)$, поэтому $x_D = 4x_E - 3x_B = 4\cdot(-4)-3\cdot(-1) = -13$. Аналогично, $y_D = 4y_E - 3y_B = 4\cdot 7 - 3\cdot 3 = 19$, $z_D = 4z_E - 3z_B = 4\cdot 10 - 3\cdot 5 = 25$, и точка *D* имеет координаты $D(-13;19;25)$.

{Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту:

$$S_{ABCD} = \tfrac{1}{2}(AD+BC)\cdot h$$

Сначала найдём основания:

$$BC = |BC| = \sqrt{(x_B-x_E)^2+(y_B-y_E)^2+(z_B-z_E)^2} = \sqrt{25+25+64} = \sqrt{114},$$
$$AD = |AD| = \sqrt{225+225+576} = \sqrt{1026} = 3\sqrt{114}.$$

Высота *h* трапеции *ABCD* равна расстоянию от точки *B* до прямой *AD*, и, по формуле (3.14), равна $h = \rho(B, AD) = \dfrac{|[\overline{AB}\times\overline{AD}]|}{|\overline{AD}|}$. Находим:

$$\overline{AB}\{-3;-1;4\},\ \overline{AD}\{-15;15;24\};$$

$$[\overline{AB}\times\overline{AD}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & -1 & 4 \\ -15 & 15 & 24 \end{vmatrix}=-84\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}-60\boldsymbol{k}=12\{-7;1;-5\};$$

$$|[\overline{AB}\times\overline{AD}]|=12\sqrt{49+1+25}=60\sqrt{3},\ |\overline{AD}|=3\sqrt{114}.$$

Следовательно, $h=\dfrac{60\sqrt{3}}{3\sqrt{114}}=20\sqrt{\dfrac{3}{114}}$, и площадь трапеции равна

$$S_{ABCD}=\tfrac{1}{2}(AD+BC)\cdot h=\tfrac{1}{2}(\sqrt{114}+3\sqrt{114})\cdot 20\sqrt{\frac{3}{114}}=40\sqrt{3}.\}$$

Замечание. В данной задаче площадь трапеции можно было бы найти и не находя координат вершин C и D. А именно, вместо части вышеприведенного решения, заключенной в красные фигурные скобки, можно предложить другое решение:

Треугольники ABE и BCE имеют общую высоту (перпендикуляр из точки B на прямую AC), поэтому их площади относятся как $S_{ABE}:S_{\Delta BCE}=$ $=AE:EC=3:1$, аналогично, $S_{\Delta ABE}:S_{\Delta DAE}=BE:ED=1:3$, и $S_{\Delta BCE}:S_{\Delta CDE}=BE:ED=1:3$. Обозначим площадь треугольника $S_{\Delta ABE}=S_0$, тогда $S_{\Delta BCE}=\frac{1}{3}S_0$, $S_{\Delta CDE}=S_0$, $S_{\Delta ADE}=3S_0$ (см. Рис. 20). Площадь всей трапеции равна сумме площадей этих четырех треугольников: $S_{ABCD}=S_0+\frac{1}{3}S_0+S_0+3S_0=\frac{16}{3}S_0$. Находим: $\overline{AB}\{-3;-1;4\}$, $\overline{AE}\{-6;3;9\}$;

$$[\overline{AB}\times\overline{AE}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & -1 & 4 \\ -6 & 3 & 9 \end{vmatrix}=-21\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-15\boldsymbol{k};$$

$$|[\overline{AB}\times\overline{AE}]|=3\sqrt{49+1+25}=15\sqrt{3}\Rightarrow S_0=\tfrac{1}{2}|[\overline{AB}\times\overline{AE}]|=\frac{15}{2}\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$S_{ABCD}=\frac{16}{3}S_0=\frac{16}{3}\cdot\frac{15}{2}\cdot\sqrt{3}=40\sqrt{3}.$$

Ответ: $C(-6;8;13)$, $D(-13;19;25)$, $S_{ABCD}=40\sqrt{3}$. ■

Пример 29. В ромбе $ABCD$ известны координаты вершин $B(2;3;5)$ и $C(9;-1;8)$, вершина A лежит в плоскости XOZ, а вершина D – в плоскости XOY. Найти координаты вершин A и D и площадь ромба.

Решение. Найдем координаты вектора $\overline{AD}=\overline{BC}\{7;-4;3\}$. Пусть точка A имеет координаты $A(x;0;z)$. Тогда точка D имеет координаты $D(x+7;-4;z+3)$. Значит, $z+3=0$, поскольку точка D лежит в плоскости XOY, отсюда находим $z=-3$. Далее $AB^2=BC^2$, поэтому $(x-2)^2+(0-3)^2+(z-5)^2=49+16+9=74\Rightarrow(x-2)^2=1\Rightarrow x=1$ или $x=3$. В первом случае $A(1;0;-3), D(8;-4;0)$, $[\overline{AB}\times\overline{AD}]=$ $=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 8 \\ 7 & -4 & 3 \end{vmatrix}=41\boldsymbol{i}+53\boldsymbol{j}-25\boldsymbol{k}$, площадь ромба равна

$S_{ABCD}=|[\overline{AB}\times\overline{AD}]|=\sqrt{41^2+53^2+25^2}=\sqrt{5115}$. Во втором случае $A(3;0;-3), D(10;-4;0)$, $[\overline{AB}\times\overline{AD}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 3 & 8 \\ 7 & -4 & 3 \end{vmatrix}=41\boldsymbol{i}+59\boldsymbol{j}-17\boldsymbol{k}$,

$S_{ABCD}=\sqrt{41^2+59^2+17^2}=\sqrt{5451}$.

Ответ: $A_1(1;0;-3), D_1(8;-4;0)$, $S_1=\sqrt{5115}$; или
$A_2(3;0;-3), D_2(10;-4;0), S_2=\sqrt{5451}$.■

Пример 30. Для трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ известно их смешанное произведение: $(\boldsymbol{abc})=\lambda$. Вычислить смешанное произведение $(\boldsymbol{pqr})$, где $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$.

Решение. Вычислим это смешанное произведение, применяя свойства (3.10):

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{pqr})&=\big((2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c})\big)=\\ &=2\big(\boldsymbol{a}(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c})\big)+5\big(\boldsymbol{b}(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c})\big)=\\ &=2\cdot3\big(\boldsymbol{aa}(\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c})\big)-2\big(\boldsymbol{ac}(\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c})\big)+5\cdot3\big(\boldsymbol{ba}(\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c})\big)-5\big(\boldsymbol{bc}(\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c})\big)=\\ &=0-2(\boldsymbol{acb})-8(\boldsymbol{acc})+15(\boldsymbol{bab})+15\cdot4(\boldsymbol{bac})-5(\boldsymbol{bcb})-20(\boldsymbol{bcc})=\\ &=2(\boldsymbol{abc})+0+0-60(\boldsymbol{abc})-0-0=-58(\boldsymbol{abc})=-58\lambda.\end{aligned}$$

Ответ: $(\boldsymbol{pqr})=-58\lambda$. ■

Пример 31. В тетраэдре $ABCD$ известны координаты его вершин: $A(4;-1;3)$, $B(1;2;2)$, $C(3;1;1)$ и $D(2;3;4)$. Проверить, что точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, и найти: (а) объем тетраэдра $ABCD$; (б) площадь грани ACD; (в) высоту тетраэдра, опущенную из вершины B; (г) расстояние между прямыми AB и CD; (д) угол между прямой AB и плоскостью ACD.

Решение. Найдем координаты векторов:

$\overline{AB}\{-3;3;-1\}$, $\overline{AC}\{-1;2;-2\}$, $\overline{AD}\{-2;4;1\}$

и вычислим их смешанное произведение:

$$\left(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-6+12+4-4+3-24=-15\neq0.$$

Следовательно, эти векторы не компланарны, и значит, точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости.

(а) Объём тетраэдра $ABCD$ равен $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right)\right|=\frac{1}{6}|-15|=\frac{5}{2}$.

(б) Сначала вычислим векторное произведение:

$$[\overline{AC}\times\overline{AD}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=10\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=5\{2;1;0\}.$$

Тогда площадь грани ACD равна

$$S_{ACD}=\tfrac{1}{2}|[\overline{AC}\times\overline{AD}]|=\tfrac{1}{2}\cdot5\sqrt{4+1}=\tfrac{5}{2}\sqrt{5}\ .$$

(в) Высота h_B тетраэдра, опущенная из вершины B на плоскость противоположной грани ACD, равна $h_B = \dfrac{3V_{ABCD}}{S_{ACD}} = \frac{15}{2} : \frac{5}{2}\sqrt{5} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

(г) Расстояние между скрещивающимися прямыми AC и BD вычислим по формуле $\rho(AC, BD) = \dfrac{\left|\left(\overline{AC}\,\overline{AB}\,\overline{BD}\right)\right|}{|[\overline{AC}\times\overline{BD}]|}$. Находим координаты вектора $\overline{BD}\{1;1;2\}$ и вычислим произведения:

$$\left(\overline{AC}\,\overline{AB}\,\overline{BD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6-2+6+6+12-1 = 15;$$

$$[\overline{AC}\times\overline{BD}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} = 3\{2;0;-1\}.$$

Поэтому $\rho(AC, BD) = \dfrac{\left|\left(\overline{AC}\,\overline{AB}\,\overline{BD}\right)\right|}{|[\overline{AC}\times\overline{BD}]|} = \dfrac{15}{3\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$

(д) Угол α между прямой AB и плоскостью ACD равен $\left|\dfrac{\pi}{2} - \beta\right|$, где β – угол между вектором $\overline{AB}$ и нормальным вектором $\boldsymbol{n}_{ACD}$ к этой плоскости. Таковым является любой вектор, пропорциональный векторному произведению (уже найденному) векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, например,
$\boldsymbol{n}_{ACD} = \frac{1}{5}[\overline{AC}\times\overline{AD}] = \{2;1;0\}$. Потому

$$\sin(AB \wedge ACD) = \sin\alpha = |\cos\beta| = \left|\cos\left(\overline{AB} \wedge \boldsymbol{n}_{ACD}\right)\right| =$$
$$= \frac{\left|\left(\overline{AB}\bullet\boldsymbol{n}_{ACD}\right)\right|}{\left|\overline{AB}\right|\cdot|\boldsymbol{n}_{ACD}|} = \frac{|-6+3+0|}{\sqrt{9+9+1}\cdot\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt{95}}.$$

Ответы: (а) $V_{ABCD} = \dfrac{5}{2}$; (б) $S_{ACD} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$; (в) $h_B = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$; (г) $\rho(AC, BD) = \sqrt{5}$;
(д) $(AB \wedge ACD) = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{95}}\right)$. ■

Пример 32. (продолжение примера 24 на стр. 34). В тетраэдре $ABCD$ известны длины рёбер, выходящих из одной вершины C и углы между ними: $CA = 4$, $CB = 5$, $CD = 6$, $\angle ACB = 60°$, $\angle ACD = \arccos\frac{1}{3}$, $\angle BCD = 120°$. Найти: (а) объем тетраэдра $ABCD$; (б) площадь грани ABD; (в) расстояние от вершины C до плоскости ABD; (г) расстояние между прямыми AC и BD; (д) угол между прямой AC и плоскостью ABD.

Решение. Рассмотрим базис, состоящий из векторов $\overline{CA} = \boldsymbol{a}$, $\overline{CB} = \boldsymbol{b}$, $\overline{CD} = \boldsymbol{d}$ (см. Рис. 23) и составим таблицу скалярных произведений эти векторов друг на друга:

$$\boldsymbol{a}^2 = 16,\ \boldsymbol{b}^2 = 25,\ \boldsymbol{d}^2 = 36,\ (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}) = 4\cdot 5\cdot\cos 60^\circ = 10,\ (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{d}) = 4\cdot 6\cdot\tfrac{1}{3} = 8,$$
$$(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{d}) = 5\cdot 6\cdot\cos 120^\circ = -15.$$

(а) Объем тетраэдра равен $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{CA}\,\overline{CB}\,\overline{CD}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|(\boldsymbol{abd})\right|$, где

$$(\boldsymbol{abd})^2 = \Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} 16 & 10 & 8 \\ 10 & 25 & -15 \\ 8 & -15 & 36 \end{vmatrix} = 2^2\cdot 5^2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 36 \end{vmatrix} = 3200.$$

Следовательно, $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\sqrt{3200} = \frac{20}{3}\sqrt{2}$.

(б) площадь грани ABD равна $S_{ABD} = \frac{1}{2}\left|[\overline{AB}\times\overline{AD}]\right|$, где

$$[\overline{AB}\times\overline{AD}]^2 = \Gamma\left(\overline{AB},\overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} \overline{AB}^2 & \left(\overline{AB}\bullet\overline{AD}\right) \\ \left(\overline{AB}\bullet\overline{AD}\right) & \overline{AD}^2 \end{vmatrix}.$$

Находим: $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, $\overline{AD} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{a}$, далее:

$$\overline{AB}^2 = (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2 = \boldsymbol{b}^2 - 2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a}^2 = 25 - 20 + 16 = 21,$$
$$\overline{AD}^2 = (\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a})^2 = \boldsymbol{d}^2 - 2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{d}) + \boldsymbol{a}^2 = 36 - 16 + 16 = 36,$$
$$\left(\overline{AB}\bullet\overline{AD}\right) = \left((\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\bullet(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a})\right) = (\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a}^2 =$$
$$= -15 - 8 - 10 + 16 = -17.$$

Поэтому $\Gamma\left(\overline{AB},\overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 36 \end{vmatrix} = 467$ и $S_{ABD} = \frac{1}{2}\sqrt{467}$.

(в) Расстояние от вершины C до плоскости ABD равно высоте $CH = h_C$ тетраэдра $ABCD$, опущенной из вершины C на плоскость грани ABD, она равна

$$\rho(C, ABD) = h_C = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABD}} =$$
$$= 20\sqrt{2} : \tfrac{1}{2}\sqrt{467} = \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{467}}.$$

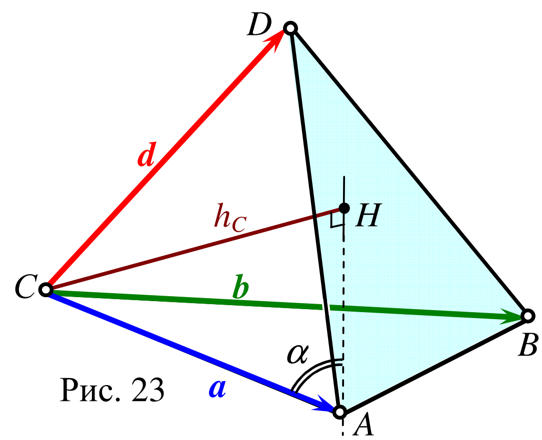


Рис. 23

(г) По формуле (3.15), расстояние между скрещивающимися прямыми AC и BD равно $\rho(CA, BD) = \dfrac{\left|\left(\overline{CA}\,\overline{CB}\,\overline{BD}\right)\right|}{\left|[\overline{CA}\times\overline{BD}]\right|}$.

Находим:

$$\left|\left(\overline{CA}\,\overline{CB}\,\overline{BD}\right)\right| = \left|(\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b}))\right| = \left|(\boldsymbol{abd}) - (\boldsymbol{abb})\right| = \left|(\boldsymbol{abd})\right| = \sqrt{3200} = 40\sqrt{2},$$

$$\left|\left[\overline{CA}\times\overline{BD}\right]\right|^2 = \Gamma\left(\overline{CA},\overline{BD}\right) = \begin{vmatrix} \overline{CA}^2 & \left(\overline{CA}\bullet\overline{BD}\right) \\ \left(\overline{CA}\bullet\overline{BD}\right) & \overline{BD} \end{vmatrix},\ \text{где}$$

$$\overline{CA} = \boldsymbol{a}^2 = 16,\ \overline{DB}^2 = (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d})^2 = \boldsymbol{b}^2 - 2(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{d}) + \boldsymbol{d}^2 = 25 + 30 + 36 = 91,$$
$$\left(\overline{CA}\bullet\overline{BD}\right) = \left(\boldsymbol{a}\bullet(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})\right) = (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}) = 8 - 10 = -2,\ \text{значит,}$$

$$\Gamma\left(\overline{CA},\overline{BD}\right)=\begin{vmatrix}16 & -2\\ -2 & 91\end{vmatrix}=1452 \Rightarrow \left|[\overline{CA}\times\overline{BD}]\right|=\sqrt{1452}=22\sqrt{3}$$

Следовательно, $\rho(CA,BD)=\dfrac{40\sqrt{2}}{22\sqrt{3}}=\dfrac{20\sqrt{6}}{33}$.

(д) Угол α между прямой AC и плоскостью ABD – это угол между AC и её ортогональной проекцией AH на эту плоскость, т.е. $\alpha=\angle CAH$, поэтому $\sin\alpha=\dfrac{CH}{CA}$, где $CH=h_A$ уже найдена в п. (в), поэтому

$$\sin\alpha=\frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{467}}:4=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{467}}.$$

Ответы: (а) $\frac{20}{3}\sqrt{2}$; (б) $\frac{1}{2}\sqrt{467}$; (в) $\dfrac{40\sqrt{2}}{\sqrt{467}}$; (г) $\dfrac{20\sqrt{6}}{33}$; (д) $\arcsin\left(\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{467}}\right)$.■

Пример 33. Для каждой грани тетраэдра построили вектор, перпендикулярный этой грани, направленный во внешнюю сторону и по длине равный площади этой грани. Доказать, что сумма этих четырех векторов равна нулю.

Решение. Пусть в тетраэдре $ABCD$ векторы $\boldsymbol{a}=\overline{DA}$, $\boldsymbol{b}=\overline{DB}$ и $\boldsymbol{c}=\overline{DC}$ образуют, например, левую тройку. Обозначим через $\boldsymbol{N}_{ABC}$, $\boldsymbol{N}_{ABD}$, $\boldsymbol{N}_{ACD}$ и $\boldsymbol{N}_{BCD}$ векторы, перпендикулярные граням ABC, ABD, ACD и BCD соответственно, направленные вовне и равные по длине площади соответствующей грани (см. Рис. 24). Тогда, очевидно,

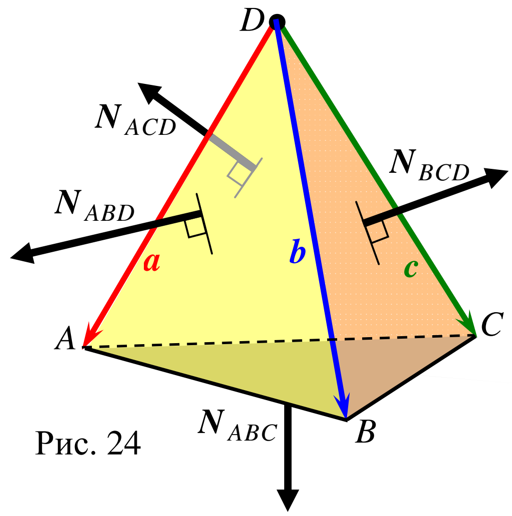


Рис. 24

$\boldsymbol{N}_{ABC}=\frac{1}{2}[\overline{AC}\times\overline{AB}]$, $\boldsymbol{N}_{ABD}=\frac{1}{2}[\overline{DA}\times\overline{DB}]$, $\boldsymbol{N}_{ACD}=\frac{1}{2}[\overline{DC}\times\overline{DA}]$ и $\boldsymbol{N}_{BCD}=\frac{1}{2}[\overline{DB}\times\overline{DC}]$. Обозначим далее: $[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{p}$, $[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{q}$, $[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{r}$. Находим: $\overline{AC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$, $\overline{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, поэтому

$[\overline{AC}\times\overline{AB}]=[(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})]=[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}]-[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]-[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}]=-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r}$;

$[\overline{DA}\times\overline{DB}]=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{p}$, $[\overline{DC}\times\overline{DA}]=[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{r}$, $[\overline{DB}\times\overline{DC}]=[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{q}$.

Следовательно,

$$\boldsymbol{N}_{ABC}+\boldsymbol{N}_{ABD}+\boldsymbol{N}_{ACD}+\boldsymbol{N}_{BCD}=\tfrac{1}{2}\left((-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r})+\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{q}\right)=\boldsymbol{0}.$$ ■

Задачи для самостоятельного решения к главе 3.

3. 1. Даны три вектора $\boldsymbol{a}\{3;4;-2\}$, $\boldsymbol{b}\{1;-2;5\}$ и $\boldsymbol{c}\{4;2;-1\}$. Найти (а) $\boldsymbol{p}=[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]$ (б) повторное векторное произведение $\boldsymbol{q}=[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]]$ и проверить полученный ответ с помощью формулы «БАЦ – ЦАБ».

3. 2. Найти координаты единичного вектора, перпендикулярного плоскости ABC, где $A(4;7;-2)$, $B(-1;3;2)$ и $C(3;4;2)$.

3. 3. Найти площадь треугольника ABC, где $A(2;3;7), B(-1;1;4)$ и $C(3;2;6)$.

3. 4. Про векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ известно, что $|\boldsymbol{a}| = 6$, $|\boldsymbol{b}| = 7$, $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = 30°$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$.

3. 5. Найти смешанное произведение $(\boldsymbol{abc})$ векторов $\boldsymbol{a}\{-2;4;5\}$, $\boldsymbol{b}\{3;1;2\}$ и $\boldsymbol{c}\{1;3;4\}$.

3. 6. В тетраэдре $ABCD$ известны координаты его вершин: $A(-1;1;2)$, $B(0;2;3)$, $C(1;4;2)$, $D(-3;4;1)$. Найти: (а) объем тетраэдра; (б) площадь грани BCD; (в) высоту, опущенную на грань BCD; (г) угол между прямой BC и плоскостью ABD; (д) расстояние между прямыми AC и BD.

3. 7. Даны три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, известно, что $(\boldsymbol{abc}) = \lambda$. Вычислить смешанное произведение $(\boldsymbol{pqr})$, где $\boldsymbol{p} = 4\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{a} - 7\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{b} + 5\boldsymbol{c}$.

3. 8. Найти угол между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если известно, что

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = k(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}), \text{ где } k \in \mathbb{R}.$$

3. 9. Доказать тождество $[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]^2 + (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{b}^2$.

3. 10. Найти $(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b})$, если $|\boldsymbol{a}| = 5$, $|\boldsymbol{b}| = 4$, и $|[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]| = 10$.

3. 11. Дана левая тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Найти $(\boldsymbol{abc})$, если $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 5$, $|\boldsymbol{c}| = 3$, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$ и $\angle(\boldsymbol{b};\boldsymbol{c}) = 3\pi/4$.

3. 12. Упростить выражение:

$$[\boldsymbol{i} \times (2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})] - [\boldsymbol{j} \times (4\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{k})] + [(\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{k}].$$

3. 13. Найти значение выражения

$$4(\boldsymbol{ijk}) - 2(\boldsymbol{jik}) + 3(\boldsymbol{iki}) + 7(\boldsymbol{kij}) + (\boldsymbol{jki}) - 8(\boldsymbol{kji}) - 13(\boldsymbol{kkj}) + 9(\boldsymbol{ikj}).$$

3. 14. В ромбе $ABCD$ известны координаты вершин $A(-4;5;4)$, $B(-3;11;3)$, вершина C лежит в плоскости YOZ, а вершина D – в плоскости XOZ. Найти координаты вершин C и D и площадь ромба.

3. 15. В квадрате $ABCD$ известны координаты вершин $A(7;1;8)$, $B(5;-2;2)$, вершина C лежит в плоскости XOY. Найти координаты вершин C и D и площадь квадрата.

3. 16. В трапеции $ABCD$, в которой AD – большее основание, известны координаты вершин $A(-1;2;11)$, $B(3;5;4)$ и точки пересечения диагоналей $E(9;7;-4)$. Найти координаты вершин C и D, если площадь трапеции равна $\dfrac{49\sqrt{3}}{2}$.

3. 17. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты вершин $A(1;8;2)$, $B(4;3;-5)$, вершина C лежит в плоскости XOZ, а вершина D – на оси OY. Найти координаты вершин C и D и площадь параллелограмма.

3. 18. В тетраэдре $ABCD$ известны длины рёбер, выходящих из одной вершины A и углы между ними: $AC = 3$, $AB = 5$, $AD = 6$, $\angle CAD = 60°$, $\angle CAB = \arccos\frac{1}{5}$, $\angle BAD = 120°$. Найти: (а) объем тетраэдра $ABCD$; (б) площадь грани BCD; (в) расстояние от вершины A до плоскости BCD; (г) расстояние между прямыми AD и BC.

3. 19. Даны векторы $\boldsymbol{a}(1;\lambda;1)$, $\boldsymbol{b}(\lambda;-1;3)$ и $c(5;0;7)$. При каких значениях λ эти векторы (а) компланарны; (б) образуют правую тройку; (в) образуют левую тройку.

3. 20. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{m} - 4\boldsymbol{n}$, равна 18. Найти значение λ, если $|\boldsymbol{m}| = 1$, $|\boldsymbol{n}| = 4$, $(\boldsymbol{m}\,^\wedge\,\boldsymbol{n}) = 5\pi/6$.

3. 21. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 4, его вершины имеют координаты $A(3;1;2)$, $B(-1;4;1)$, $C(2;1;5)$ и $D(2;\lambda;0)$. Найти значение λ.

3. 22. Найти сумму всех значений α, при которых объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}(3;-1;1)$, $\boldsymbol{b}(\alpha;5;3)$ и $\boldsymbol{c}(1;4;\alpha)$, равен 2.

3. 23. Найти значения λ, если известно, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не компланарны и $((\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c} + \lambda\boldsymbol{a})) = 7(\boldsymbol{cba})$.

3. 24. При каких положительных значениях α точки $A(3;0;\alpha)$, $B(\alpha;1;8)$, $C(2;4;3)$ и $D(4;5;6)$ лежат в одной плоскости?

3. 25. При каких отрицательных значениях λ площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}(1;1;2)$ и $\boldsymbol{b}(\lambda;1;3)$, равна $\sqrt{59}$?

3. 26. Объем тетраэдра $ABCD$ равен V_0. Найти объем тетраэдра, построенного на векторах $\overline{AK}$, $\overline{BM}$ и $\overline{CN}$, где $K \in BD$, $M \in CD$, $N \in AD$ и $DK : DB = \alpha$, $DM : DC = \beta$, $DN : DA = \gamma$.

3. 27. Выразить формулой площадь треугольника ABC на плоскости через координаты его вершин: $A(x_1;\, y_1), B(x_2;\, y_2), C(x_3;\, y_3)$.

3. 28. Выразить через скалярные произведения (наподобие формулы БАЦ–ЦАБ) следующие повторные векторные произведения: (а) $[\boldsymbol{b}\times[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]]$; (б) $[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}]]$; (в) $[[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\times\boldsymbol{c}]$;

3. 29. Даны произвольные векторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{n}$. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n}]$, $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{n}]$ и $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}]$ компланарны.

3. 30. Найти необходимое и достаточное условие на векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, при котором выполняется равенство $[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]] = [[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\times\boldsymbol{c}]$.

3. 31. Векторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ удовлетворяют условию $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$. Доказать, что $[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}] = [\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}]$.

3. 32. Векторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{n}$ связаны соотношениями $[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}]$ и $[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r}] = [\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{n}]$. Доказать коллинеарность векторов $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}$.

3. 33. Доказать, что векторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$, удовлетворяющие условию $[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}]+[\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}]+[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}]=\boldsymbol{0}$, компланарны.

3. 34. Три ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ связаны соотношениями $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]$, $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]$. Найти длины этих векторов и углы между ними.

3. 35. Доказать, что $|(\boldsymbol{pqr})|\le|\boldsymbol{p}|\cdot|\boldsymbol{q}|\cdot|\boldsymbol{r}|$. В каком случае имеет место знак равенства?

3. 36. Три вектора $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overline{OB}$ и $\boldsymbol{c}=\overline{OC}$ удовлетворяют условию

$$[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{0}.$$

Доказать, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

3. 37. Из точки O проведены три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overline{OB}$ и $\boldsymbol{c}=\overline{OC}$. Доказать, что плоскость ABC перпендикулярна вектору $\boldsymbol{n}=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]$.

3. 38. Доказать, что для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ справедливы следующие тождества:

(а) $[[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\times[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}]]=(\boldsymbol{abc})\boldsymbol{a}$;

(б) $([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\bullet[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}])=\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}\bullet c)-(\boldsymbol{a}\bullet c)(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})$;

(в) $[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]]]=(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}]$;

(г) $[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]]+[\boldsymbol{b}\times[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]]+[\boldsymbol{c}\times[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]]=\boldsymbol{0}$;

(д) $([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}][\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}][\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}])=(\boldsymbol{abc})^2$;

(е) $(\boldsymbol{abc})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2-\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})^2-\boldsymbol{b}^2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})^2-\boldsymbol{c}^2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})^2+2\,(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})$.

3. 39. Доказать, что для любых четырех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ справедливы следующие тождества:

(а) $([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\bullet[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}])=(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})$;

(б) $[[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\times[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}]]=(\boldsymbol{abd})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{abc})\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{acd})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{bcd})\boldsymbol{a}$;

(в) $[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}]]]=(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{d})[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}]-(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}]$;

(г) $[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}]]]=(\boldsymbol{acd})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}]$;

(д) $([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\bullet[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}])+([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}]\bullet[\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}])+([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}]\bullet[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}])=0$;

(е) $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}]+(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})[\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}]+(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{d})[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{bcd})\boldsymbol{a}$.

3. 40. Доказать, что если векторы $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}]$, $\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}]$ и $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}]$, компланарны, то и векторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ тоже компланарны.

3. 41. Доказать, что если векторы $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}]$, $\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}]$ и $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}]$, компланарны, то они коллинеарны.

3. 42. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

3. 43. Выразить с помощью задачи 3.39(а) объем тетраэдра *ABCD*, если известны длина ребра *AB*, величина φ двугранного угла при этом ребре и площади соседних граней *ABC* и *ABD*.

3. 44. Доказать, что для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ справедливы формулы:

(а) $\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{p}) & (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{q}) \\ (\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{p}) & (\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{q}) \end{vmatrix} = ([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\bullet[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}])$;

(б) $\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{p}) & (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{q}) & (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{r}) \\ (\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{p}) & (\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{q}) & (\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{r}) \\ (\boldsymbol{c}\bullet\boldsymbol{p}) & (\boldsymbol{c}\bullet\boldsymbol{q}) & (\boldsymbol{c}\bullet\boldsymbol{r}) \end{vmatrix} = (\boldsymbol{abc})(\boldsymbol{pqr})$.

3. 45. Доказать, что для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ справедливы следующие неравенства:

(а) $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})^2 \le \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$;

(б) $[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]^2 \le \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$;

(в) $(\boldsymbol{abc})^2 \le \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2$;

(г) $(\boldsymbol{abc})^2 \le \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})^2$;

(д) $(\boldsymbol{abc})^2 \le \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2 - \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})^2 + \boldsymbol{b}^2(\boldsymbol{c}\bullet\boldsymbol{a})^2 + \boldsymbol{c}^2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})^2\right)$

3. 46. При каких векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ уравнение $[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{b}$ имеет решения? Найти все эти решения.

3. 47. При каком условии на векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ система уравнений

$$\begin{cases} [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}] + [\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{c}, \\ [\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{x}] - [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{d} \end{cases}$$

имеет решение? Найти все эти решения.

3. 48. Даны четыре некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$. Найти нетривиальную линейную комбинацию этих векторов, дающую нулевой вектор (искомые коэффициенты выразить через скалярное, векторное и/или смешанное произведения этих векторов).

3. 49. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и еще один вектор $\boldsymbol{d}$. Найти (выразить с помощью скалярного, векторного и/или смешанного произведения) координаты вектора по $\boldsymbol{d}$ в базисе $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.

3. 50. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и еще один вектор $\boldsymbol{d}$. Разложить вектор $\boldsymbol{d}$ по векторам $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]$ и $\boldsymbol{r} = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]$ (коэффициенты разложения выразить с помощью скалярного, векторного и/или смешанного произведения).

3. 51. Выразить формулой объем тетраэдра, если длины трех его рёбер, выходящих из одной вершины равны a, b и c, а углы между этими рёбрами равны α, β и γ.

3. 52. Доказать **вторую теорему косинусов для тетраэдра**: *квадрат площади любой грани тетраэдра равен сумме квадратов площадей трех его других граней минус удвоенная сумма попарных произведений площадей этих трех граней на косинус угла между ними;* например, для грани ABC тетраэдра $ABCD$:

$$S_{ABC}^2 = S_{ABD}^2 + S_{ACD}^2 + S_{BCD}^2 - \\ - 2S_{ABD}\cdot S_{ABD}\cos\alpha - 2S_{ABD}\cdot S_{BCD}\cos\beta - 2S_{ACD}\cdot S_{BCD}\cos\gamma.$$

где α, β и γ – величины двугранных углов при рёбрах AD, BD и CD соответственно.

3. 53. Доказать, что если три грани тетраэдра попарно перпендикулярны, то квадрат площади четвертой грани равен сумме квадратов площадей первых трех граней.

3. 54. Пусть в трехгранном угле плоские углы равны α, β и γ, а противолежащие им двугранные углы равны φ, ψ и θ соответственно. Доказать следующие равенства:

$$\text{(а) } \cos\theta = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}; \quad \text{(б) } \cos\gamma = \frac{\cos\theta + \cos\varphi\cos\psi}{\sin\varphi\sin\psi};$$

$$\text{(в) } \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{\sin\beta}{\sin\psi} = \frac{\sin\gamma}{\sin\theta}.$$

3. 55. Доказать, что, что если три плоских угла одного трехгранного угла соответственно равны трем плоским углам другого трехгранного угла, то и противолежащие им двугранные углы первого трехгранного угла соответственно равны двугранным углам другого трехгранного угла.

3. 56. Доказать, что если три двугранных угла одного трехгранного угла соответственно равны трем двугранным углам другого трехгранного угла, то и противолежащие им плоские углы первого трехгранного угла соответственно равны плоским углам другого трехгранного угла.

3. 57. Доказать, что все четыре грани тетраэдра равновелики тогда и только тогда, когда его противоположные рёбра попарно равны.

3. 58. Доказать, что противоположные рёбра тетраэдра равны тогда и только тогда, когда сумма косинусов двугранных углов при всех рёбрах тетраэдра равна 2.

3. 59. Сумма плоских углов трехгранного угла равна 180^0. Доказать, что сумма косинусов его двугранных углов равна 1.

3. 60. Если от каждой грани многогранника во внешнюю сторону отложить вектор, перпендикулярный этой грани и равный по длине её площади, то сумма всех этих векторов равна нулю. Доказать это утверждение для: (а) произвольной пирамиды; (б) произвольного выпуклого многогранника.

Литература

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. – М., Изд. МГТУ, 1998. – 392 с.

2. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для втузов / Под ред. А.В. Ефремова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1993. – 478 с.

3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – Спб.: Профессия, 2001. – 240 с.

4. Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии, – М. Наука, 1989. – 288 с.

Ответы

Обозначения: ♣ – указания[11], ⊐ – применить.

К главе 1.

1. 1. (а) $\overline{AF}$; (б) $\boldsymbol{0}$.

1. 4. ♣ $\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$.

1. 5. ♣ (б) ⊐ задачу 1. 11; (в) Выразить через радиус-векторы треугольника вершин радиус-векторы точек, делящих медианы треугольника в отношении $2:1$, считая от вершины.

1. 6. ♣ (а) Выразить через радиус-векторы вершин тетраэдра радиус-векторы точек, делящих медианы тетраэдра в отношении $3:1$, считая от вершин; (б) разложить по базису $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA_1}$ векторы $\overline{AK}$, $\overline{AL}$, $\overline{AM}$ и $\overline{AN}$, где точки K, L, M и N – середины диагоналей параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1. 7. ♣ Разложить данные векторы по базису $\overline{CA}$, $\overline{CB}$.

1. 8. ♣ Разложить данные векторы по базису $\overline{CA}$, $\overline{CB}$.

1. 9. $\overline{CD}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$; (б) $\boldsymbol{q}-2\boldsymbol{p}$; (в) $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$; (г) $2\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$; (е) $2\boldsymbol{q}$; (ж) $2\boldsymbol{q}-2\boldsymbol{p}$.

1. 10. (а) $\lambda(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})$; (б) $(\lambda-1)\boldsymbol{q}-\lambda\boldsymbol{p}$; (в) $\left(\lambda-\dfrac{1}{\lambda}\right)\boldsymbol{q}-\lambda\boldsymbol{p}$; (г) $\lambda\boldsymbol{q}-(\lambda+1)\boldsymbol{p}$ ($\lambda=2\cos 36^\circ = =\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$).

1. 11. ♣ Разложить данные векторы по векторам $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$.

1. 12. $\boldsymbol{0}$.

1. 13. $\lambda=1, \lambda=-2$.

1. 14. $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}, \beta=\sqrt[3]{\dfrac{2}{9}}$.

1. 15. $\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\overline{AB}-\overline{AD}$.

1. 16. ♣ Если M – середина хорды AB, то $\overline{OM}=\frac{1}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OB}\right)$.

1. 17. ♣ Разложить данные векторы по базису $\overline{CA}$, $\overline{CB}$.

1. 18. ♣ Разложить данные векторы по базису $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$.

1. 19. ♣ (для тетраэдра) Вычесть разложения радиус-векторов точек E и E_1 через радиус-векторы вершин соответствующих тетраэдров.

1. 20. ♣ Точка M лежит на прямой $AB \Leftrightarrow \overline{AM}=\lambda\cdot\overline{AB}$ при некотором $\lambda\in\mathbb{R}$.

1. 21. ♣ Пусть $CA_1:CB=\alpha, AB_1:AC=\beta, BC_1:BC=\gamma$, $A_1M:AA_1=x$ $B_1M:BB_1=y$, $C_1M:CC_1=z$, $\boldsymbol{a}=\overline{CA}$, $\boldsymbol{b}=\overline{CB}$. Тогда: $\overline{CM}=x\boldsymbol{a}+(1-x)\alpha\boldsymbol{b}=(1-y)(1-\beta)\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=(1-z)\left(\gamma\boldsymbol{a}+(1-\gamma)\boldsymbol{b}\right)$. Выразить отсюда γ, x, y и z через α и β.

---

[11] Выбор значка ♣ для «указаний» продиктован только его красотой.

1. 22. ♣ Пусть $BA_1 : BC = \alpha, CB_1 : CA = \beta, AC_1 : AB = \gamma$, выразить вектор $\overline{AA_1}$ через векторы $\boldsymbol{b} = \overline{AB_1}$, $\boldsymbol{c} = \overline{AC_1}$ и ⊐ задачу **1. 20**.

1. 23. $\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overline{AB} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overline{CD}$.

1. 24. 3.

1. 25. $\frac{1}{3}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r})$.

1. 26. $\overline{BC} = \frac{6}{11}\boldsymbol{p} - \frac{10}{11}\boldsymbol{q} + \frac{4}{11}\boldsymbol{r}$.

1. 27. $DM : MG = 4:7, EM : MF = 6:5$.

1. 28. $EM : MB_1 = 7:6, \overline{BM} = \frac{6}{13}\boldsymbol{p} + \frac{3}{13}\boldsymbol{q}$.

1. 29. (а) $\frac{1}{2}\sqrt{161}$; (б) $\frac{4}{5}\sqrt{21}$; (в) $M\left(3; \frac{20}{3}; \frac{16}{3}\right)$; (г) $P\left(\frac{7}{2}; 7; 6\right)$.

1. 30. $C(8;8;8), D(9;16;13)$.

1. 31. (а) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; (б) $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}\boldsymbol{a} + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}\boldsymbol{b}$; (в) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\boldsymbol{a} + \operatorname{tg}\beta\cdot\boldsymbol{b}$; (г) $\frac{1}{3}\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b}$;
(д) $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\boldsymbol{a} + \dfrac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\boldsymbol{b}$; (е) $\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma\cdot\boldsymbol{a} + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma\cdot\boldsymbol{b}$;
(ж) $\frac{\cos\alpha}{2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\boldsymbol{a} + \frac{\cos\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}\boldsymbol{b}$.

1. 32. (б) $N\{7:6:15\}$.

1. 33. $\boldsymbol{0}$.

1. 34. $M\{-3:-9:8:16\}$.

1. 35. $\boldsymbol{a}$.

1. 36. $\boldsymbol{b}$.

1. 37. (а) $P\{\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma\}$ ♣ см. Пример 4; (б) $Q\{\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma\}$ ♣ $\overline{CQ} = \frac{1}{2\sin\gamma}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\overline{CA} + \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\overline{CB}\right)$ и ⊐ тригонометрическое тождество $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$; (в) $H\{\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma\}$ ♣ $\overline{CH} = \operatorname{ctg}\gamma\left(\operatorname{ctg}\beta\cdot\overline{CA} + \operatorname{ctg}\alpha\cdot\overline{CB}\right)$ и ⊐ тригонометрическое тождество $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = 1$.

1. 38. ♣ ⊐ задачу 1. 36.(б) и 1. 32.

1. 39. $\boldsymbol{0}$ ⊐ задачу 1. 36.(в) и 1. 32.

1. 40. $\left\{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} : \frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2} : \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} - \frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\right)\right\}$.

1. 41. $(\rho, AB) = h_C \cdot \left|1 - \frac{d_A}{h_A} - \frac{d_B}{h_C}\right|$, $\left\{\frac{d_A}{h_A} : \frac{d_B}{h_B} : \left(1 - \frac{d_A}{h_A} - \frac{d_B}{h_B}\right)\right\}$.

1. 42. ♣ $\overline{OK} = \frac{|KD|}{h}\overline{OA} + \frac{|KE|}{h}\overline{OB} + \frac{|KF|}{h}\overline{OC}$, где h – высота треугольника.

1. 43. $M\{\alpha_1\beta_1 : \alpha_2\beta_2 : \alpha_1\beta_2\}$.

1. 44. $\det(P) = 0$, где P – матрица 3-го порядка, составленная из барицентрических координат данных точек.

1. 45. $\det(P)=0$**,** где P – матрица 4-го порядка, составленная из барицентрических координат данных точек.

1. 46. $\{m_A : m_B : m_C : m_D\}$.

1. 47. $\{3:1:6\}$.

1. 48. (б) (1°) $N(15;-14;18)$; (2°) $K(0;0;-1)$; (в) (1°) $\mathrm{Pr}^{AB}_{BCD}(\boldsymbol{m})=\{6;9;15\}$; (2°) $\mathrm{Pr}^{BCD}_{AB}(\boldsymbol{m})=\{5;-10;-5\}$; (3°) $\mathrm{Pr}^{ABC}_{BD}(\boldsymbol{m})=3\sqrt{6}$.

1. 49. (а) $-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{d}$; (б) $\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$; (в) $P\{0:1:5:2\}$, $Q\{1;0;2;0\}$.

1. 50. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ суть проекции вектора $\boldsymbol{m}$ на прямую OA, OB и OC параллельно плоскости OBC (соответственно OAC и OAB).

1. 51. ♣ Вычесть явные выражения для $\boldsymbol{M}_O$ и $\boldsymbol{M}_P$.

1. 52. (а) в его середине; (б) и (г) в точке пересечения диагоналей; (в) в центре; (д) в середине отрезка, соединяющего центроиды оснований.

1. 53. (а) $\{(b+c):(a+c):(a+b)\}$;
(б) $\{(\sin\beta+\sin\gamma):(\sin\alpha+\sin\gamma):(\sin\alpha+\sin\beta)\}$ или
$\left\{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right):\cos\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right):\cos\frac{\gamma}{2}\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right\}$.

1. 54. (а) $Q_1\left(\frac{13}{3};\frac{11}{3};4\right)$; (б) $Q_2\left(\frac{9}{2};4;\frac{17}{4}\right)$.

1. 55. В центре вписанного шара второго тетраэдра, вершины которого совпадают с точками пересечения медиан граней данного тетраэдра.

1. 56. $\{(b+c+d):(a+c+e):(a+b+f):(d+e+f)\}$.

1. 57. $\{1:1:1:1\}$.

1. 58. $\{1:1:1:1\}$; (б) $\{S_{BCD}:S_{ACD}:S_{ABD}:S_{ABC}\}$.

К главе 2.

2. 1. (а) и (б) нет, т.к. лишены смысла.

2. 2. ♣ Раскрыть скобки в левой и правой частях доказываемых тождеств.

2. 3. $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$**.**

2. 4. (а) $\boldsymbol{m}\{\sqrt{3};\sqrt{3};\sqrt{3}\}$**;** (б) $\boldsymbol{m}\{-\sqrt{3};-\sqrt{3};-\sqrt{3}\}$**.**

2. 5. $\boldsymbol{p}\{2\sqrt{3};-2;2\sqrt{5}\}$ или $\boldsymbol{p}\{\sqrt{15};-1;2\sqrt{5}\}$**.**

2. 6. $\alpha=\dfrac{3\pi}{4},\beta=\dfrac{\pi}{2},\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ или $\alpha=\dfrac{\pi}{2},\beta=\dfrac{\pi}{3},\gamma=\dfrac{\pi}{6}$**.**

2. 7. $\cos\varphi=\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cdot\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2$**.**

2. 8. (а) $x=R\cos\theta\cos\varphi$, $y=R\cos\theta\sin\varphi$, $z=R\sin\theta$; (б) $\cos\alpha=\cos\theta\cos\varphi$, $\cos\beta=\cos\theta\sin\varphi$, $\cos\gamma=\sin\theta$**.**

2. 9. $R\cdot\arccos\left(\cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\sin\theta_1\sin\theta_2\right)$ ♣ кратчайший путь по поверхности шара между двумя её точками есть дуга окружности, являющейся сечением сферы плоскостью, проходящей через её центр и эти две точки, ⊐ задачи 2.7 и 2.8 (б).

2. 10. $-\dfrac{9}{7}$**.**

2. 11. $-\dfrac{17}{\sqrt{129}}$**.**

2. 12. (а) $-\dfrac{1}{6}$**;** (б) $\boldsymbol{p}\left\{2;-\dfrac{13}{5};\dfrac{11}{5}\right\}$.

2. 13. ♣ (в) Пусть H – точка пересечения высот AA_1 и BB_1, рассмотреть векторы $\boldsymbol{a}=\overline{HA}$, $\boldsymbol{b}=\overline{HB}$ и $\boldsymbol{c}=\overline{HC}$, вывести ортогональность векторов $\boldsymbol{c}$ и $\overline{AB}$ из ортогональности пар векторов $\boldsymbol{a},\overline{BC}$ и $\boldsymbol{b},\overline{AC}$; (г) рассмотреть скалярный квадрат суммы векторов $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$, где O центр описанной окружности треугольника ABC.

2. 14. ♣ Пусть $\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$, доказать, что $\overline{HA}\perp\overline{BC}, \overline{HB}\perp\overline{AC}$.

2. 15. ♣ Пусть O **–** центр описанной окружности. Тогда $\overline{AH}=\overline{OB}+\overline{OC}$, $\overline{BC}=\overline{OC}-\overline{OB}$.

2. 16. ♣ $\left(\overline{HA}\bullet\overline{HB}\right)-\left(\overline{HB}\bullet\overline{HC}\right)=\left(\overline{HB}\bullet\overline{CA}\right)=0$**.**

2. 17. ♣ $\overline{OM}=\frac{1}{3}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right)$ и ⊐ задачу **2. 14.**

2. 18. ♣ Пусть $\boldsymbol{p}=\overline{OA},\boldsymbol{q}=\overline{OB},\boldsymbol{r}=\overline{OA}$**,** ⊐ задачу **2. 14** и $OH^2+a^2+b^2+c^2=$ $=(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r})^2+(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r})^2+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r})^2+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2$.

2. 19. ♣ Пусть $\boldsymbol{a}=\overline{OA},\boldsymbol{b}=\overline{OB},\boldsymbol{c}=\overline{OA}$**,** тогда $AB^2+BC^2+AC^2+9\cdot OM^2=$ $=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2+9\cdot\left(\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\right)^2$

2. 20. ♣ $\overline{OM}=\frac{1}{4}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}\right)$.

2. 21. $\boldsymbol{r}\{4;-4;8\}$**.**

2. 22. (а) $\lambda=-\frac{1}{4}$; (б) $\lambda=2$.

2. 23. (а) $\lambda=3$; (б) $\lambda=\frac{5}{4}$.

2. 24. $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$**.**

2. 25. ♣ Разложить векторы сторон и медиан по базису $\boldsymbol{a}=\overline{CA}$ и $\boldsymbol{b}=\overline{CB}$.

2. 26. $\dfrac{(1+k^2)(m^2-n^2)}{2k(m^2+n^2)}$**.**

2. 27. $\sqrt{281}$**.**

2. 28. $\arccos\frac{13}{15}$**.**

2. 29. $\dfrac{13}{5\sqrt{10}}$**.**

2. 30. (а) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})=0$; (б) $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})>0$; (в) $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})<0$.

2. 31. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$ или $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$**.**

2. 32. ⊐ задачу 2. 19.

2. 33. ♣ Если O – середина AC, то $MA^2+MC^2=2\cdot MO^2+\frac{1}{2}AC^2$.

2. 34. (а) центр описанной окружности; (б) точка пересечения медиан; (в) точка пересечения высот; (г) центр вписанной окружности.

2. 35. $\frac{23}{75}$.

2. 36. $\arccos\frac{3}{5}$.

2. 37. (а) $\boldsymbol{x}_1\{4;-3\}, \boldsymbol{x}_2\left\{\frac{7}{5};\frac{24}{5}\right\}$; (б) $\boldsymbol{x}\{1;2\}$; (в) $\boldsymbol{x}\{-2;6\}$; (г) $\boldsymbol{x}_1\{\frac{20}{\sqrt{29}};\frac{8}{\sqrt{29}}\}$, $\boldsymbol{x}_2\{-\frac{20}{\sqrt{29}};-\frac{8}{\sqrt{29}}\}$.

2. 38. $\boldsymbol{x} = \alpha\cdot\boldsymbol{a} + \beta\cdot\boldsymbol{b}$, где $\alpha = \frac{p\boldsymbol{b}^2 - q(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}, \beta = \frac{q\boldsymbol{a}^2 - p(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$.

2. 39. $1 + 2xyz - x^2 - y^2 - z^2 = 0$. ♣ ⊐ свойство определителя Грама.

2. 40. ♣ Упорядочить эти векторы так, чтобы изображающие их направленные отрезки AB, BC и CD обладали свойством: либо AB и CD либо BC и AD имеют общую точку (векторы $\overline{AB}, \overline{BC}$ и $\overline{CD}$ равны векторам $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, но, возможно, в другом порядке).

2. 41. ♣ Пусть $a = |\boldsymbol{p}|, b = |\boldsymbol{q}|, c = |\boldsymbol{r}|, x = \cos(\boldsymbol{q}\hat{}\boldsymbol{r}), y = \cos(\boldsymbol{p}\hat{}\boldsymbol{r})$, $z = \cos(\boldsymbol{p}\hat{}\boldsymbol{q})$. При фиксированных a, b, c выражение $|\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{q}| + |\boldsymbol{r}| + |\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}| - |\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}| - |\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}| - |\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}|$ есть функция $f(x,y,z)$, определённая в трехмерной выпуклой области D, заданной неравенствами $|x| \le 1$, $|y| \le 1$, $|z| \le 1$, $1 + 2xyz - x^2 - y^2 - z^2 \ge 0$ (см. пример 23), её граница – поверхность S внутри куба $|x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1$, заданная уравнением $1 + 2xyz - x^2 - y^2 - z^2 = 0$, соответствующая компланарным векторам $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$. Показать, что $f(x,y,z)$ монотонна по каждому переменному, и поэтому для каждой точки $M(x,y,z) \in D$ найдется точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на поверхности S, для которой $f(x,y,z) \ge f(x_1,y_1,z_1)$, далее ⊐ задачу 2. 40.

2. 42. ♣ (а) и (б): разложить векторы диагоналей параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ по базису $\boldsymbol{a} = \overline{AA_1}, \boldsymbol{b} = \overline{AB}, \boldsymbol{c} = \overline{AD}$; (в) Пусть $\boldsymbol{a} = \overline{DA}$, $\boldsymbol{b} = \overline{DB}$, $\boldsymbol{c} = \overline{DC}$, тогда $AB \perp CD \Leftrightarrow \big((\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\bullet\boldsymbol{c}\big) = 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})$; (г) см. пример 20; (д) пусть O – центр вписанного в тетраэдр шара, касающегося его граней в точках K, L, M и N, рассмотреть скалярный квадрат суммы радиус-векторов этих точек, точное равенство справедливо только когда противоположные рёбра попарно равны; (е) ⊐ теорему косинусов для тетраэдра; (ж) Пусть O – центр описанной сферы, тогда сумма радиус-векторов вершин относительно O равна нулю; (з) Если M – точка пересечения медиан грани ABC тетраэдра $ABCD$, то $\overline{DM} = \frac{1}{3}\left(\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC}\right)$; (и) ⊐ задачу 1. 11.

2. 43. ♣ Пусть $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ – радиус векторы вершин A, B, C и D относительно произвольной точки отсчета O, тогда условие означает, что $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}\bullet\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})$; (а) Пусть O – центр описанной сферы, точка H – конец вектора $\overline{OH}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$, тогда $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{d}|$, показать, что вектор $\overline{DH}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})$ ортогонален векторам $\overline{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ и $\overline{AC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$; (б) $\overline{OM}= =\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\frac{1}{2}\overline{OH}$.

2. 44. ♣ Разложить указанные векторы по векторам $\boldsymbol{a}=\overline{DA}$, $\boldsymbol{b}=\overline{DB}$, $\boldsymbol{c}=\overline{DC}$.

2. 45. ♣ см. ♣ к задаче **2. 33**.

2. 46. ♣ ⊐ задачу **2. 20**.

2. 47. (а) 108; (б) 841; (в) 4356; (г) 1800.

2. 48. 0.

2. 49. (а) не изменится; (б) умножится на λ^2; (в) и (г) не изменится.

2. 50. 0 ♣ векторы $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ и $\boldsymbol{p}_3$ компланарны.

2. 51. (а) $\sqrt{\dfrac{19}{3}}$; (б) $\dfrac{3}{2\sqrt{7}}$.

2. 52. $-\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)$.

2. 53. $\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$, где $x=\dfrac{m\sin^2\alpha+nr+kq}{\Delta}$, $y=\dfrac{mr+n\sin^2\beta+kp}{\Delta}$, $z=\dfrac{mq+np+k\sin^2\gamma}{\Delta}$, $p=\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha$, $q=\cos\alpha\cos\gamma-\cos\beta$, $r=\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma$, $\Delta=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma$.

2. 54. $\cos\varphi=\dfrac{a^2+d^2-b^2-f^2}{2ce}$ ♣ ⊐ теорему косинусов для тетраэдра.

2. 55. $2\sqrt{15}$.

2. 56. $3\sqrt{7}$ ♣ ⊐ задачу 2. 2.(г) .

2. 57. 24 ♣ ⊐ задачу 2. 2.(в).

2. 58. ♣ Разложить указанные векторы по векторам $\boldsymbol{a}=\overline{DA}$, $\boldsymbol{b}=\overline{DB}$, $\boldsymbol{c}=\overline{DC}$.

2. 59. ♣ ⊐ задачу 2.58. Точное равенство только когда $ABCD$ – параллелограмм.

2. 60. ♣ Пусть $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overline{OB}$, $\boldsymbol{c}=\overline{OC}$, тогда $\overline{OD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2=R^2$.

2. 61. ♣ Пусть $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ – единичные векторы, направленные по рёбрам трехгранного угла, тогда векторы $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ направлены по биссектрисам его плоских углов, а векторы $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ направлены по биссектрисам смежных углов.

2. 62. ♣ Пусть $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overline{OB}$, $\boldsymbol{c}=\overline{OC}$**,** тогда равенство трех указанных отрезков означает, что $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$, откуда $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})$.

2. 63. ♣ Пусть $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ – радиус-векторы вершин A, B, C и D относительно центра описанной сферы, тогда условие означает, что вектор $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})$ ортогонален векторам $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ и $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})$, а вектор $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d})$ ортогонален векторам $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d})$, откуда $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c}\bullet\boldsymbol{d})$, $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{d})$, $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})$.

2. 64. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ ♣ Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ – единичные вектора, направленные по данным лучам, и $\boldsymbol{d}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$, умножить это разложение скалярно на каждый из этих четырех векторов**.**

2. 65. $\overline{OD}=\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\alpha\cdot\overline{OA}+\beta\cdot\overline{OB}+\gamma\cdot\overline{OC}\right)$, где $\alpha=b^2c^2$, $\beta=a^2c^2$, $\gamma=a^2b^2$**.**

2. 66. ♣ Рассмотреть скалярный квадрат суммы единичных векторов, направленных по этим лучам.

2. 67. ♣ См. ♣ к задаче 2. 33.

2. 68. ♣ Пусть $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ – радиус-векторы вершин A, B и C относительно центра описанной окружности O, тогда $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=R$**,** $\overline{CK}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}$**,** $\overline{OE}=\boldsymbol{c}+\lambda\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}\right)$**,** и условие $\overline{OE}^2=R^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\lambda\left(\tfrac{1}{2}((\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c}))-\boldsymbol{c}^2\right)+\lambda^2\left(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}\right)^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC^2+BC^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^2+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2=4R^2-2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})-2(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})=$$

$$=2\lambda\left(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}\right)^2=2CK\cdot CE.$$

2. 69. Пусть $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ – радиус-векторы вершин A, B, C и D относительно центра O описанной сферы радиуса R**,** тогда $\overline{OE}=\boldsymbol{d}+\lambda\left(\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\boldsymbol{d}\right)$ и $\overline{OE}^2=R^2$.

2. 70. 5 ♣ Диагонали граней образуют между собой углы 60°.

2. 71. $2\sqrt{55}$**.**

2. 72. ♣ Пусть тетраэдр построен на векторах $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$, тогда $|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{r}|,|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{q}|,|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{p}|$. Искомый параллелепипед построен на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ таких, что $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}$. Выразить $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ через $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ и показать, что $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})=0$.

2. 73. ♣ Пусть тетраэдр построен на векторах $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$, тогда $(\boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{q})=(\boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{q}\bullet\boldsymbol{r})$. Искомый параллелепипед построен на векторах

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ таких, что $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}$. Показать, что $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$.

К главе 3.

3. 1. **(а)** $\boldsymbol{p}\{-8;21;10\}$; (б) $\boldsymbol{q}\{82;-14;95\}$.

3. 2. $\pm\frac{1}{\sqrt{393}}\{-4;16;11\}$.

3. 3. $S=\frac{1}{2}\sqrt{62}$.

3. 4. $S=231$.

3. 5. 4.

3. 6. (а) $V=\dfrac{11}{6}$; (б) $=\frac{1}{2}\sqrt{93}$; (в) $h=\dfrac{11}{\sqrt{93}}$; (г) $\arcsin\frac{11}{6\sqrt{7}}$; (д) $\dfrac{19}{3\sqrt{26}}$.

3. 7. 114λ.

3. 8. $\operatorname{arctg} k$.

3. 9. ♣ $[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2\cdot\sin^2(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})$.

3. 10. $\pm10\sqrt{3}$.

3. 11. $-15\sqrt{2}$.

3. 12. $-\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$.

3. 13. 13.

3. 14. $C_1(0;6;1)$, $D_1(-1;0;2)$, $S_1=\sqrt{819}$**;** $C_2(0;6;5)$, $D_2(-1;0;6)$, $S_2=\sqrt{603}$.

3. 15. $C_1(2;4;0)$ $D(4;7;6)$, $C_2\left(\frac{152}{13};-\frac{32}{13};0\right)$, $D_2\left(\frac{178}{13};\frac{7}{13};6\right)$, $S=49$.

3. 16. $C(13;9;-10)$, $D(24;12;-24)$ ♣ Пусть $\frac{AD}{BC}=\lambda>1$, тогда $S_{ABCD}=\dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda}\cdot S_{ABE}$.

3. 17. $C(3;0;-7)$, $D(0;5;0)$, $S=\sqrt{486}$.

3. 18. (а) $V=9$; (б) $S=6\sqrt{3}$; (в) $h=\frac{3}{2}\sqrt{3}$; (г) $=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

3. 19. (а) $\lambda\in\{2;1/7\}$ (б) $\lambda\in(1/7;2)$; (в) $\lambda\in(-\infty;1/7)\cup(2;+\infty)$.

3. 20. $\lambda\in\{-3;3/2\}$.

3. 21. $\lambda\in\{4;4/13\}$.

3. 22. -38.

3. 23. $\lambda=-2$.

3. 24. $\alpha=5$.

3. 25. $\alpha=-2$.

3. 26. $(1-\alpha\beta\gamma)V_0$.

3. 27. $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}\right|$.

3. 28. (а) $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})$; (б) $\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$; (в) $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})$.

3. 29. ♣ Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ ортогональны вектору $\boldsymbol{n}$.

3. 30. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$ или $(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})=0$.

3. 31. ♣ $\boldsymbol{r} = -(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q})$.

3. 32. ♣ Показать, что $[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0}$.

3. 33. ♣ Умножить левую и правую часть данного равенства скалярно на вектор $\boldsymbol{r}$.

3. 34. $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = 1$, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$.

3. 35. $|(\boldsymbol{pqr})| = |\boldsymbol{p}| \cdot |\boldsymbol{q}| \cdot |\boldsymbol{r}| \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$, где $\alpha = (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$, β -- угол между вектором $\boldsymbol{r}$ и плоскостью векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Точное равенство только если $\alpha = \beta = 90°$.

3. 36. ♣ Показать, что $[\overline{CA} \times \overline{CB}] = [(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})] = \boldsymbol{0}$.

3. 37. ♣ Вычислить $\left(\boldsymbol{n} \bullet \overline{AB}\right) = (\boldsymbol{n} \bullet (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}))$ и $\left(\boldsymbol{n} \bullet \overline{AC}\right)$.

3. 38. и **3.39.** ♣ ⊐ формулу 3.7.

3. 40. ♣ ⊐ задачу 3.38(д).

3. 41. ♣ ⊐ задачу 3. 40.

3. 42. ♣ $((\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a})) = 2(\boldsymbol{abc})$.

3. 43. $V_{ABCD} = \dfrac{2S_{ABC} \cdot S_{ABD} \cdot \sin\varphi}{3|AB|}$.

3. 44. ♣ (а) см. задачу 3. 39(а); (б) разложить определитель по первой строке и ⊐ задачу 3. 44(а) и 3. 39(е).

3. 45. ♣ (а) и (б) ⊐ задачу 3. 9; (в) ⊐ задачу 3. 35; (г) ⊐ неравенство $|(\boldsymbol{abc})| \le |[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]| \cdot |\boldsymbol{c}|$ и формулу 3.8. (д) три раза ⊐ задачу 3.44(г).

3. 46. Если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{x}$ – любой вектор; если $\boldsymbol{a} \ne \boldsymbol{0}$ и $(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}) = 0$, то $\boldsymbol{x} = \frac{1}{\boldsymbol{a}^2}[\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}] + \lambda\boldsymbol{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$; в остальных случаях решений нет.

3. 47. При $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ или $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 > 0$ и $(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{d})$, $(\boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{d})$. Если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ – любые векторы. Если $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 > 0$, то

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \tfrac{1}{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}([\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{b}]) + \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{y} &= \tfrac{1}{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}([\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d}] + [\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}]) + \mu\boldsymbol{a} - \lambda\boldsymbol{b} \end{aligned}\right\} \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. 48. $(\boldsymbol{bcd})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{adc})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{abd})\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{acb})\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ ♣ ⊐ задачу 3.39 (б).

3. 49. $\boldsymbol{d}\{\alpha; \beta; \gamma\}$, где $\alpha = \frac{(\boldsymbol{bcd})}{(\boldsymbol{abc})}$, $\beta = \frac{(\boldsymbol{adc})}{(\boldsymbol{abc})}$, $\gamma = \frac{(\boldsymbol{abd})}{(\boldsymbol{abc})}$.

3. 50. $\boldsymbol{d} = \frac{(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{abc})}\boldsymbol{p} + \frac{(\boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{abc})}\boldsymbol{q} + \frac{(\boldsymbol{c} \bullet \boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{abc})}\boldsymbol{r}$ ♣ ⊐ задачу 3. 39(е).

3. 51. $V = \frac{1}{6}abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$.

3. 52. ♣ ⊐ Пример 33, возвести в скалярный квадрат равенство $\boldsymbol{N}_{ABC} = -(\boldsymbol{N}_{ABD} + \boldsymbol{N}_{ACD} + \boldsymbol{N}_{BCD})$.

3. 53. ♣ ⊐ задачу 3. 52.

3. 54. ♣ (а) Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ – единичные векторы, направленные по рёбрам трехгранного угла, $(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})=\alpha$, $(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c})=\beta$, $(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})=\gamma$. Тогда, согласно задаче 3. 38(б), $\cos\theta=\cos([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}]\wedge[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}])=\dfrac{([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}]\bullet[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}])}{|[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}]|\cdot|[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]|}=$ $=\dfrac{\boldsymbol{c}^2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})}{\sin\beta\sin\alpha}$. (б) пусть ***p, q, r*** – единичные векторы, перпендикулярные граням трехгранного угла, и $(\boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{r})=\varphi$, $(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{r})=\psi$, $(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q})=\theta$, тогда векторы $[\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}]$, $[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}]$ и $[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}]$ сонаправлены векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ соответственно $\Rightarrow\cos\gamma=\dfrac{([\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}]\bullet[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}])}{|[\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}]|\cdot|[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}]|}=$ $=\dfrac{(\boldsymbol{q}\bullet\boldsymbol{r})(\boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{r})-\boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{q})}{\sin\varphi\cdot\sin\psi}$, (в) ⊐ задачу 3. 38(а): $|(\boldsymbol{abc})|=|\boldsymbol{c}(\boldsymbol{abc})|=$ $=|[[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}]\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]]|=\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\theta$; аналогично, $|(\boldsymbol{abc})|=$ $=\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\sin\psi=\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\sin\varphi$.

3. 55. ♣ ⊐ задачу 3.54(а).

3. 56. ♣ ⊐ задачу 3.54(б).

3. 57. ♣ ⊐ Пример 33, рассмотрев скалярный квадрат равенства $\boldsymbol{N}_{ABC}+\boldsymbol{N}_{ABD}+\boldsymbol{N}_{ACD}+\boldsymbol{N}_{BCD}=\boldsymbol{0}$, где $|\boldsymbol{N}_{ABC}|=|\boldsymbol{N}_{ABD}|=|\boldsymbol{N}_{ACD}|=$ $=|\boldsymbol{N}_{BCD}|$, доказать, что противоположные двугранные углы тетраэдра попарно равны, затем ⊐ задачу **3.55**.

3. 58. ♣ См. ♣ к задаче 3.57.

3. 59. ♣ Рассмотреть тетраэдр, все грани которого – равные треугольники с углами α, β и γ, и ⊐ пример 33 и задачи 2.42(д) и 3.54.

3. 60. ♣ Указанное свойство аддитивно в том смысле, что если произвольный многогранник разрезать плоскостью на два других многогранника, для которых оно верно, то это свойство справедливо и для исходного многогранника; ⊐ пример 33. Выпуклый многогранник можно разрезать на пирамиды, а каждую пирамиду составить из тетраэдров.