Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана.

Соболев С.К.

Двойные интегралы.

Методические указания к решению задач

Москва
МГТУ им. Баумана
2008

Предисловие

Обычный определенный интеграл от функции одной переменной хорошо знаком студентам первого курса и имеет многочисленные приложения в различных отраслях знаний. Однако, существует иного задач в геометрии, физике, экономике, для которых недостаточно обычного определенного интеграла – интеграла по одномерному координатному отрезку. Таковы, например, задачи о вычислении площади поверхности (не являющейся поверхностью вращения), объема тела в общем случае, массы пластинки или тела переменной плотности. Для решения этих задач нужно уметь интегрировать по плоской или даже пространственной области. Такие интегралы называются двойными и тройными соответственно.

В данном пособии приводятся все необходимые теоретические сведения о двойных интегралах, подробно рассказывается о методах вычисления двойных интегралах и их приложениях, разобраны иллюстрирующие примеры.

Пособие будет полезно студентам экономических и технических специальностей.

1. Понятие двойного интеграла

1. 1. Определение и интерпретация двойного интеграла.

Пусть D – некоторая замкнутая([1]) ограниченная([2]) плоская область, т.е. множество $D \subset \mathbf{R}^2$, содержащее свою границу и находящееся внутри некоторого квадрата или круга конечного размера, и пусть функция двух переменных $f(x,y)$ определена во всех точках области D. ***Диаметром*** множества D назовем наибольшее расстояние между его точками:

$$d(D) \underset{def}{=} \max\{|AB| : A,B \in D\}.$$

Представим область D в виде объединения конечного числа частей, не пересекающихся между собой или пересекающихся разве что лишь по общей границе (если она есть): $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, и обозначим площадь i-ой части через $\Delta S_i = S(D_i)$. Пусть λ – ***мелкость*** полученного разбиения: $\lambda = \max_{1 \le i \le n} d(D_i)$. Выберем в каждой части D_i по точке $M_i(x_i, y_i)$ (см. Рис. 1) и составим интегральную сумму. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$. Если существует конечный предел этих интегральных сумм при $\lambda \to 0$, не зависящий от способа разбиения области D и выбора точек M_i, то этот предел называется ***двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D***, и обозначается:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$$

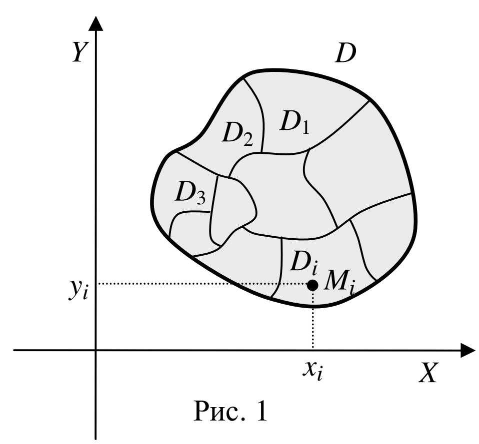

Рис. 1

Экономическая интерпретация двойного интеграла.

Пусть D –область посевов некоторой сельскохозяйственные культуры, и пусть в каждой точке $M(x, y) \in D$ известна урожайность $q(x, y)$ этой культуры (например, по наблюдениям из космоса). Тогда величина $Q = \iint\limits_D q(x, y)dxdy$ есть количество урожая, которое можно собрать с области D при отсутствии потерь.

1. 2. Свойства двойных интегралов.

(а) **Линейность**. $\iint\limits_D \big(\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)\big)dxdy = \alpha \cdot \iint\limits_D f(x, y)dxdy + \beta \cdot \iint\limits_D g(x, y)dxdy$;

(Имеется в виду, что если существуют оба интеграла в правой части, то существует интеграл и в левой части).

(б) **Аддитивность**. Если область D есть объединение областей D_1 и D_2, пересекающихся только по своей общей границе (см. Рис. 2), то

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy;$$

(Аналогично, если существуют оба интеграла в правой части, то существует интеграл и в левой части).

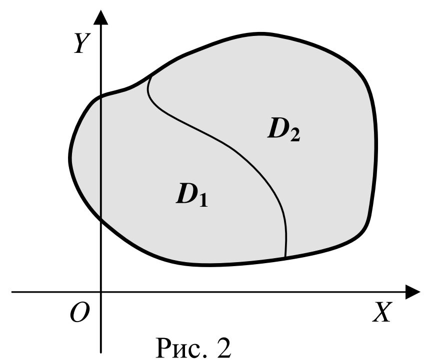

Рис. 2

(в) **Интеграл от константы:** Двойной интеграл от константы по области D равен произведению этой константы на площадь области D:

$\iint\limits_D C dxdy = C \cdot S(D)$, если $C = const$;

($S(D)$ – площадь области D).

(г) **Переход к неравенству:**
Если для всех точек $M(x, y) \in D$ верно неравенство

$f(x, y) \le g(x, y)$, то

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy \le \iint\limits_D g(x, y)dxdy;$$

(д) **Теорема об оценке:**
Если числа m_1 и m_2 таковы, что для всех точек $M(x, y) \in D$ верны неравенства

$m_1 \le f(x, y) \le m_2$, то

$$m_1 \cdot S(D) \le \iint\limits_D f(x, y)dxdy \le m_2 \cdot S(D);$$

Определение. ***Средним значением функции $f(x, y)$ на множестве D*** называется число

$$\hat{f}\big|_D \underset{def}{=} \frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

(ж) **Теорема о среднем.** Если множество D замкнуто([1]), ограниченно([2]) и связно([3]), а функция $f(x, y)$ непрерывна([4]) на множестве D, то найдется точка $M_0(x_0; y_0) \in D$ такая, что $\hat{f}\big|_D = f(M_0)$, т.е. такая, что $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = f(M_0) \cdot S(D)$.

2. Вычисление двойного интеграла

2.1. Повторный интеграл.

Повторным интегралом называется выражение вида

$$\int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx,$$

Повторный интеграл вычисляется **справа налево**, т.е. сначала находится интеграл $\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy = F(x)$, в котором x является ***параметром***, т.е. постоянной, а затем вычисляется интеграл $\int_a^b F(x)dx$.

Аналогично вычисляется и повторный интеграл вида

$$\int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Пример 1. Вычислить повторный интеграл $\int_0^2 dy \int_1^{y+2} (y^2+2x)dx$.

Решение. Сначала находим внутренний, т.е. правый интеграл (в котором $y = const$):

$$\int_1^{y+2} (y^2+2x)dx = \left(y^2x + x^2 \right)\Big|_{x=1}^{x=y+2} = y^2(y+2) + (y+2)^2 - y^2 - 1 = y^3 + 3y^2 + 4y + 3 = F(y).$$

Следовательно, $\int_0^2 dy \int_1^{y+2} (y^2+2x)dx = \int_0^2 F(y)dy = \int_0^2 \left(y^3 + 3y^2 + 4y + 3 \right) dy =$

$$= \left(\tfrac{1}{4}y^4 + y^3 + 2y^2 + 3y \right)\Big|_{y=0}^{y=2} = 4 + 8 + 8 + 6 - 0 = 26.$$

2.2. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

(а) Пусть область D задается неравенствами (см. Рис. 3):

$$a \le x \le b, \;\; y_{\text{нижн}}(x) \le y \le y_{\text{верхн}}(x), \tag{1}$$

где функции $y_{\text{нижн}}(x)$ и $y_{\text{верхн}}(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, и функция $f(x,y)$ непрерывна в области D. Тогда двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области D

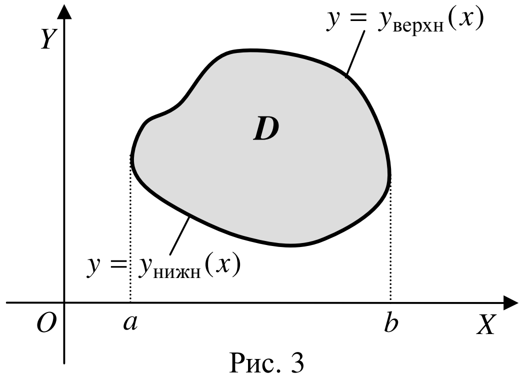

Рис. 3

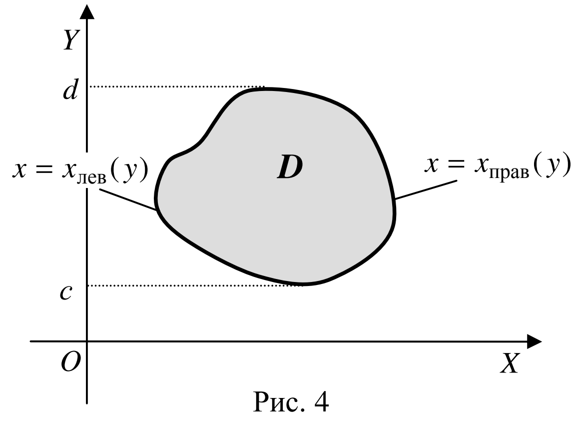

Рис. 4

вычисляется в виде повторного интеграла:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_{\text{нижн}}(x)}^{y_{\text{верхн}}(x)} f(x,y)dy \tag{2}$$

(б) Пусть область D задается неравенствами:

$$c \le y \le d,\ x_{\text{лев}}(y) \le x \le x_{\text{прав}}(y) \tag{3}$$

(см. Рис. 4). Тогда двойной интеграл по области D от функции $f(x,y)$ вычисляется в виде повторного интеграла:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_{\text{лев}}(y)}^{x_{\text{прав}}(y)} f(x,y)dx\,. \tag{4}$$

Замечание 1. Если область D нельзя задать в виде неравенств (1) или (3), то её разбивают на две или несколько частей $D_1, D_2, \dots$, каждую из которых можно задать такими неравенствами. И тогда двойной интеграл по области D есть сумма интегралов по областям $D_1, D_2, \dots$.

Замечание 2. Если при вычислении двойного интеграла в виде повторного по формуле (2) переходят к вычислению в виде повторного по формуле (4) (или наоборот), то говорят, что в двойном интеграле ***изменяется порядок интегрирования***.

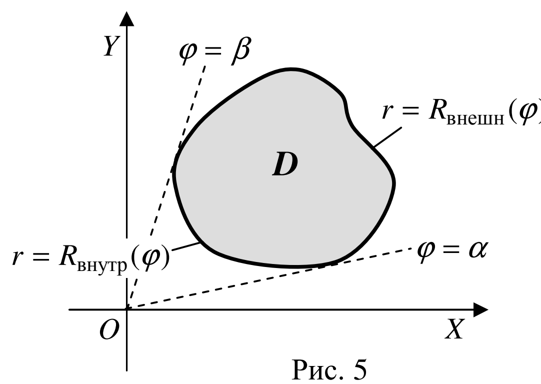

Рис. 5

2.3. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Пусть в <u>полярных координатах</u>([5]) область D задается неравенствами: $\alpha \le \varphi \le \beta,\ R_{\text{внутр}}(\varphi) \le r \le R_{\text{внешн}}(\varphi)$.

(см. Рис. 5), где функции $R_{\text{внутр}}(\varphi)$ и $R_{\text{внешн}}(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$. Тогда двойной интеграл по области D от функции $f(x,y)$ вычисляется в виде повторного интеграла:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{R_{\text{внутр}}(\varphi)}^{R_{\text{внешн}}(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr$$

Обращаем внимание на дополнительный множитель r во втором (правом) интеграле.

Это **<u>якобиан</u>([6])**, который всегда появляется в двойном интеграле при переходе к другим координатам. В полярных координатах якобиан равен *r*.

Пример 2. В повторном интеграле:

$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\frac{1}{3}x^2} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy \tag{5}$$

изменить порядок интегрирования и перейти в нем к полярным координатам.

Решение. Данный повторный интеграл (точнее, сумма двух повторных) представляет собой двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области D, являющейся объединением двух областей: области D_1, заданной неравенствами: $0 \le x \le \sqrt{3}, -\sqrt{2x - x^2} \le y \le \frac{1}{3}x^2$, и области D_2, заданной неравенствами: $\sqrt{3} \le x \le 2, -\sqrt{2x - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}$ (см. Рис. 6).

Нарисуем границы области D (см. Рис. 7):

(1) $y = \frac{1}{3}x^2 \Leftrightarrow 3y = x^2$ (парабола),

(2) $y = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2 = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ – верхняя часть окружности радиуса $R = 2$ с центром в точке в начале координат;

(3) $y = -\sqrt{2x - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 0 \\ y^2 = 2x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ – нижняя половина окружности радиуса $R = 1$ с центром в точке $A(1;0)$.

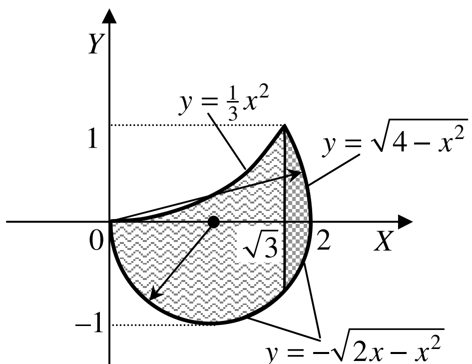

Рис. 6

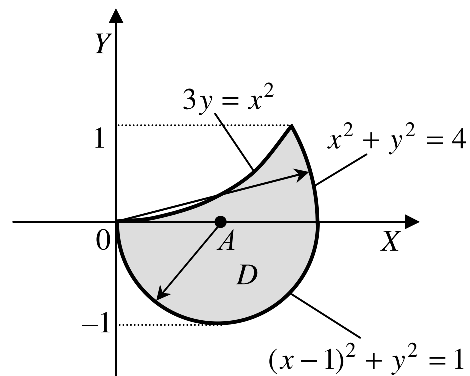

Рис. 7

Теперь каждую границу этой области зададим уравнением, в котором переменная x будет выражена через y:

(а) $3y = x^2, x \ge 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3y}$;

(б) $(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 - y^2}$;

(в) $x^2 + y^2 = 4, x > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{4 - y^2}$.

Левая граница области D составная: она состоит из четверти окружности и дуги параболы, правая граница также составная: состоит из двух дуг окружностей. Поэтому область D представим в виде объединения областей D_3 и D_4 (см. Рис. 8:

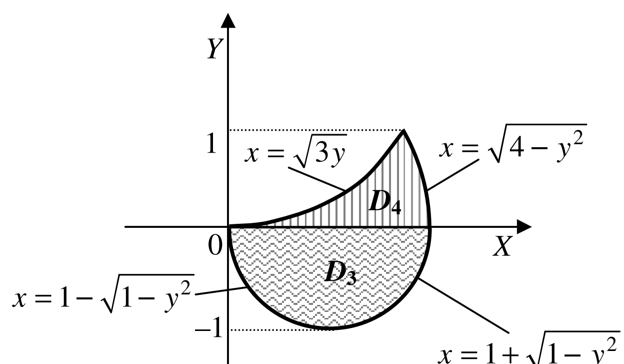

Рис.8

$D_3 : \begin{cases} -1 \le y \le 0, \\ 1 - \sqrt{1 - y^2} \le x \le 1 + \sqrt{1 + y^2}; \end{cases}$ $\quad D_4 : \begin{cases} 0 \le y \le 1, \\ \sqrt{3y} \le x \le \sqrt{4 - y^2}. \end{cases}$

Изменим в двойном интеграле порядок интегрирования:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_3} f(x,y)dxdy + \iint_{D_4} f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{0} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1+y^2}} f(x,y)dx + \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{3y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx.$$

Теперь перейдем к полярным координатам. Выразим уравнения всех границ в полярных координатах:

(а) $x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow r = 2$;

(б) $(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow r = 2\cos\varphi$;

(в) $3y = x^2 \Leftrightarrow 3r\sin\varphi = r^2\cos^2\varphi \Leftrightarrow r = \dfrac{3\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$.

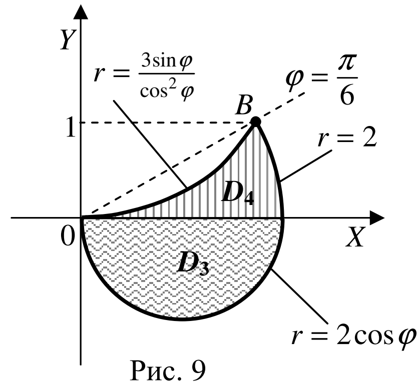

Рис. 9

Крайняя верхняя точка B области D имеет координаты $B(1;\sqrt{3})$, поэтому луч OB образует с осью OX угол $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$. Область опять удобно представить в виде объединения тех же областей D_3 и D_4, которые в полярных координатах задаются неравенствами (см. Рис. 9):

$$D_3 : \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le 0, \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi; \end{cases} \qquad D_4 : \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}, \\ \dfrac{3\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \le r \le 2. \end{cases}$$

Следовательно, наш двойной интеграл в полярных координатах выглядит так:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_4} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{\frac{3\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr. \qquad (6)$$

Пример 3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy\,dxdy$ по области

D: $x^2 + y^2 \le 2x,\ y \le 0$

(а) в декартовых координатах;
(б) в полярных координатах.

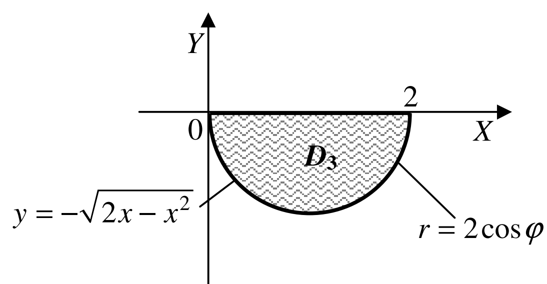

Рис. 10

Решение. Неравенство $x^2 + y^2 \le 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \le 1$ задает круг радиуса $R = 1$ с центром в точке $A(1;0)$, поэтому данная область совпадает с областью D_3 из примера 2 (см. Рис. 10), и в декартовых координатах вычисление двойного интеграла будет такое:

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{0} xy\,dy = \int\limits_0^2 dx\cdot x\cdot\left(\tfrac{1}{2}y^2\right)\Big|_{y=-\sqrt{2x-x^2}}^{0} =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(-x^2 + \tfrac{1}{2}x^3\right)dx = -\tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{1}{8}x^4 = -\frac{8}{3} + 2 = -\frac{2}{3}.$$

(б) Вспомним, что $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, поэтому двойной интеграл в полярных координатах будет выглядеть так:

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi\cdot r\cdot dr = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos\varphi\cdot\sin\varphi\, d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^3 dr =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos\varphi\cdot\sin\varphi\, d\varphi\cdot\left(\tfrac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2\cos\varphi} = 4\cdot\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^5\varphi\cdot\sin\varphi\, d\varphi = \{t=\cos\varphi\} =$$

$$= -4\int\limits_0^1 t^5 dt = -4\cdot\frac{1}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Замечание 3. Значение интеграла получилось отрицательное, т.к. подынтегральная функция $f(x,y)=xy$ отрицательна в области интегрирования.

Замечание 4. В данном примере вычисление двойного интеграла и в декартовых, и в полярных координатах довольно несложное. Однако часто вычисление двойного интеграла в декартовых координатах в виде повторного (в каком-то определенном порядке) весьма затруднительно, и вычисления значительно упрощаются при изменении порядка интегрировании или переходе к полярным координатам.

3. Приложения двойных интегралов.

3.2. Геометрические и физические приложения двойного интеграла

(а) **Площадь плоской фигуры.**

$$S(D) = \iint\limits_D 1\cdot dxdy = \iint\limits_D dxdy\,.$$

(б) **Масса плоской материальной пластинки.**

Если плоская материальная пластинка D расположена в плоскости XOY и имеет переменную плотность $\mu(x,y)$, то масса пластинки D вычисляется по формуле

$$m(D) = \iint\limits_D \mu(x,y)dxdy\,.$$

(в) **Координаты <u>центра масс</u>([14]) плоской материальной пластинки.** Координаты центра масс $C(x_0;y_0)$ плоской материальной пластинки D, имеющей переменную плотность $\mu(x,y)$, находятся по формулам:

$$x_0 = \frac{M_x}{m(D)},\quad y_0 = \frac{M_y}{m(D)},\ \text{где}$$

$$M_x = \iint\limits_D x\cdot\mu(x,y)\,dxdy,\quad M_y = \iint\limits_D y\cdot\mu(x,y)\,dxdy,\quad m(D) = \iint\limits_D \mu(x,y)dxdy\,;$$

(г) Координаты <u>центро́ида</u>([7]) плоской геометрической фигуры. ***Центро́идом*** (нематериальной!) геометрической фигуры D называется центр масс этой фигуры в предположении, что её плотность во всех точках одинакова и равна, например, единице. Тогда масса плоской фигуры равна её площади, и координаты центроида $C(x_0;y_0)$ плоской фигуры D находятся по формулам:

$$x_0 = \frac{M_x}{S(D)},\quad y_0 = \frac{M_y}{S(D)},\ \text{где}\ M_x = \iint\limits_D x\cdot dxdy,\quad M_y = \iint\limits_D y\cdot dxdy,\quad S(D) = \iint\limits_D dxdy\,;$$

(д) **Вторая формула Гульдина**([13])**:** Объем тела, полученного вращением вокруг некоторой оси плоской фигуры, расположенной в плоскости оси по одну сторону от неё, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описываемую при вращении центро́идом([7]) этой фигуры, т.е.

$$V = S(D)\cdot 2\pi R_0,$$

где $S(D)$ – площадь фигуры D, R_0 – расстояние от центроида этой фигуры до оси вращения.

(е) **Площадь поверхности в пространстве.** Если поверхность σ задана уравнением $z = f(x,y)$, где $M(x;y)\in D$ (см. Рис. 11), то площадь поверхности σ вычисляется по формуле:

$$S(\sigma) = \iint\limits_D \sqrt{1+(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2}\,dxdy\,.$$

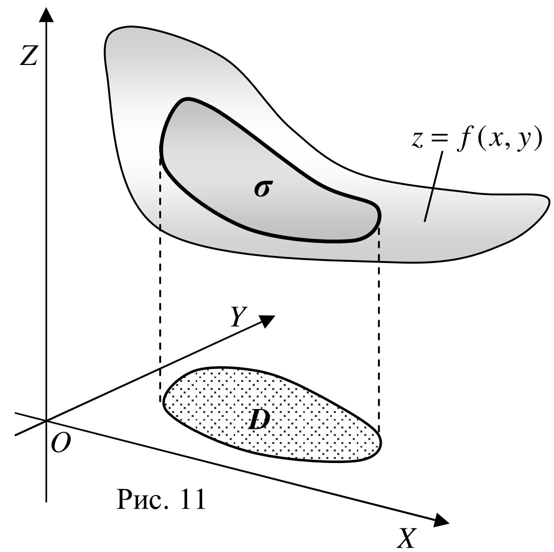

Рис. 11

(ж) Объем тела в пространстве.

Если тело T проецируется на плоскость XOY в фигуру D и задано неравенствами

$z_{\text{нижн}}(x,y)\le z\le z_{\text{верхн}}(x,y),\ M(x;y)\in D$,

(см. Рис. 12), то объём тела T вычисляется по формуле:

$$V(T) = \iint\limits_D \Big(z_{\text{верхн}}(x,y) - z_{\text{нижн}}(x,y)\Big)\,dxdy\,.$$

3.2. Примеры на приложения двойных интегралов

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной одной петлей кривой $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$ ($x,y\ge 0$, $a = const > 0$).

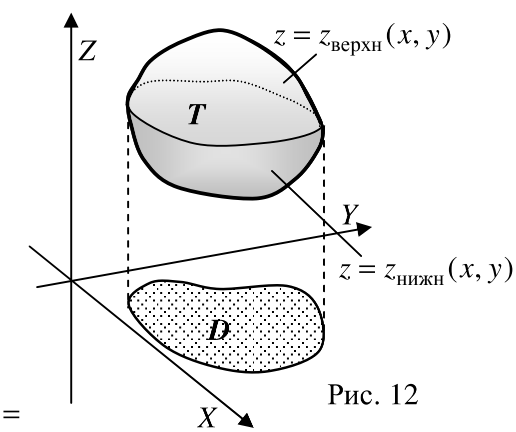

Рис. 12

Решение. Перейдем к полярным координатам([5]), т.е применим формулы:

$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ x^2+y^2 = r^2$. Получим

$r^4 = 2a^2r^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi \Leftrightarrow r^2 = a^2\sin 2\varphi \Rightarrow$

$r = a\sqrt{\sin 2\varphi}$. Это **лемниската Бернулли**. Найдем площадь фигуры, ограниченной одной её петлей (см. Рис. 13):

$$S = \iint\limits_D 1\cdot dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r\,dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(\tfrac{1}{2}r^2\right)\Bigg|_{r=0}^{r=a\sqrt{\sin 2\varphi}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin 2\varphi\,d\varphi = -\tfrac{1}{4}a^2\cos 2\varphi\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}.$$

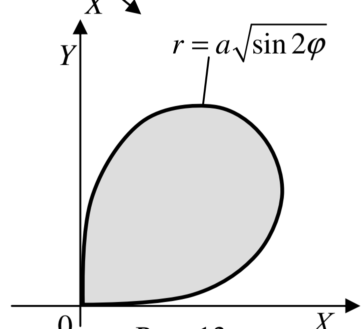

Рис. 13

Этот пример показывает, что применение двойных интегралов к вычислению площадей не дает ничего нового по сравнению с определенным интегралом.

Пример 5. Найти координаты центра масс плоской пластинки D, заданной неравенствами $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3 - x^2 + 2x$, имеющей плотность $\mu = x$.

Решение. Область D ограничена осями координат и дугой параболы $y = -x^2 + 2x + 3$ (см. Рис. 14). Сначала найдем массу этой пластинки:

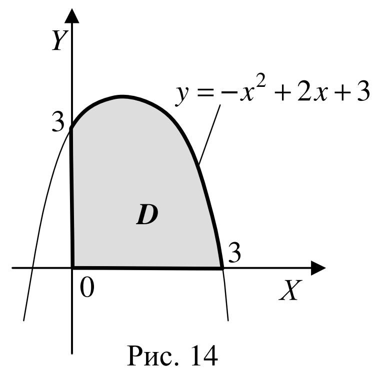

Рис. 14

$$m(D) = \iint\limits_D \mu \cdot dxdy = \iint\limits_D x \cdot dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3+2x-x^2} x \cdot dy =$$

$$= \int\limits_0^3 dx \cdot x \cdot y \Big|_{y=0}^{y=3+2x-x^2} = \int\limits_0^3 \left(3x + 2x^2 - x^3\right) dx =$$

$$= \left(\tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^3 = \frac{27}{2} + 18 - \frac{81}{4} = \frac{45}{4}.$$

Теперь вычислим

$$M_x = \iint\limits_D x \cdot \mu(x,y)dxdy = \iint\limits_D x^2 dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3+2x-x^2} x^2 \cdot dy = \int\limits_0^3 \left(3x^2 + 2x^3 - x^4\right) dx =$$

$$= \left(x^3 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right)\Big|_{x=0}^{x=3} = 27 + \frac{81}{2} - \frac{243}{5} = \frac{189}{10} \Rightarrow x_0 = \frac{M_x}{m(D)} = \frac{189}{10} : \frac{45}{4} = \frac{42}{25} = 1{,}68.$$

$$M_y = \iint\limits_D y \cdot \mu(x,y)dxdy = \iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3+2x-x^2} xy \cdot dy = \int\limits_0^3 x \cdot dx\left(\tfrac{1}{2}y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=3+2x-x^2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int\limits_0^3 x \cdot \left(3 + 2x - x^2\right)^2 dx = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^3 \left(9x + 12x^2 - 2x^3 - 4x^4 + x^5\right) dx =$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{9}{2}x^2 + 4x^3 - \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{4}{5}x^5 + \tfrac{1}{6}x^6\right)\Big|_{x=0}^{x=3} = \frac{81}{4} + 54 - \frac{81}{4} - \frac{2 \cdot 243}{5} + \frac{243}{4} = \frac{351}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{M_y}{M(D)} = \frac{351}{20} : \frac{45}{4} = \frac{39}{25} = 1{,}56.$$

Ответ: центр масс имеет координаты $C(1{,}68; 1{,}56) = C\left(\frac{42}{25}; \frac{39}{25}\right)$.

Пример 6. На каком расстоянии от диаметра находится центрóид(7) полукруга радиуса R?

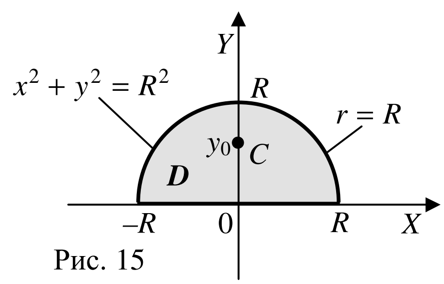

Рис. 15

Первое решение. Поместим начало координат в центр полукруга, и пусть ось его диаметр лежит на оси OX. (см. Рис. 15). Тогда полукруг D задаётся неравенствами: $x^2 + y^2 \le R^2$, $y \ge 0$. Центроид любой симметричной фигуры лежит на её оси симметрии, поэтому центрóид $C(x_0; y_0)$ полукруга лежит на оси OY, т.е. $x_0 = 0$. Вычислим координату $y_0 = \dfrac{M_y}{S(D)}$, где $S(D) = \frac{1}{2}\pi R^2$.

$$M_y = \iint\limits_D y\,dxdy = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} r\sin\varphi \cdot r \cdot dr = \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{R} r^2 \cdot dr = \frac{R^3}{3}(-\cos\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{2R^3}{3}.$$

Следовательно, $y_0 = \dfrac{2R^3}{3} : \dfrac{\pi R^2}{2} = \dfrac{4R}{3\pi}$.

Второе решение. Пусть искомое расстояние равно *d*. Применим вторую формулу Гульдина. Объем тела, полученного вращением полукруга вокруг его диаметра, равен $V = S(D)\cdot 2\pi d = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot 2\pi = \pi^2 R^2 d$. С другой стороны, тело вращения – шар радиуса *R*, и его объем хорошо известен, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, Следовательно, $\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi^2 R^2 d$, откуда $d = \dfrac{4R}{3\pi}$.

Ответ: расстояние от центроида полукруга радиуса *R* до его диаметра равно $d = \dfrac{4R}{3\pi}$.

Пример 7. Найти площадь поверхности кругового цилиндра $x^2 + z^2 = a^2$, вырезаемой параболическим цилиндром $y^2 = a^2 - ax$,

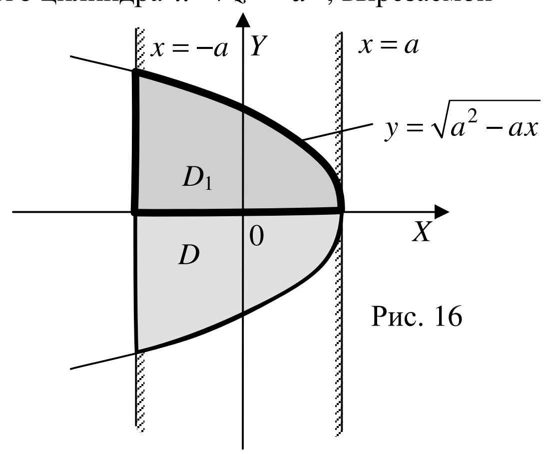

Рис. 16

Решение. Образующие цилиндрической поверхности(9) $x^2 + z^2 = a^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ параллельны оси OY, из последнего уравнения следует, что $-a \le x \le a$. Искомая поверхность σ проецируется на плоскость XOY в область *D*, ограниченную прямыми $x = a$, $x = -a$ и параболой $y^2 = a^2 - ax \Leftrightarrow y^2 = -a(x-a)$ с вершиной в точке $V(a;0)$ и ветвями направленными влево. Причем, из-за знака $\pm$ в уравнении поверхности, в эту область она проецируется дважды (сверху и снизу). Сама поверхность симметрична и относительно плоскости *ZOX*, поэтому достаточно проинтегрировать по верхней половине D_1 области D и умножить на 4:

$$S(\sigma) = 2\iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy = 4\iint\limits_{D_1} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy,$$

где $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, а область D_1 ограничена прямыми $y = 0, x = -a$ и параболой $y = \sqrt{a^2 - ax}$ (см. рис. 16).

$$z'_x = \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},\ z'_y = 0 \Rightarrow$$

$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{a^2 - x^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ и площадь поверхности σ равна

$$S(\sigma) = 4\iint\limits_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dxdy =$$

$$= 4\int_{-a}^{a} dx \int_{0}^{\sqrt{a^2-ax}} \frac{a}{\sqrt{a^2-ax}} dy = 4a\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2-ax}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = 4a\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a(a-x)}{(a-x)(a+x)}} dx =$$

$$4a\sqrt{a}\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{x+a}} = 8a\sqrt{a}\cdot\sqrt{x+a}\Bigg|_{x=-a}^{x=a} = 8a\sqrt{a}\cdot\sqrt{2a} = 8a^2\sqrt{2}.$$

Ответ: $S(\sigma) = 8a^2\sqrt{2}$.

Пример 8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \ \ (1) \ \text{ и } \ x^2+y^2-2z^2=-4 \ \ (2) .$$

Решение. Первая поверхность – это верхняя часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} z \ge 0 \\ z^2 = x^2+y^2 \end{cases}$, а вторая $x^2+y^2-2z^2=-4 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ – двуполостный гиперболоид([10]). Найдем линию пересечения этих поверхностей, для чего во второе уравнение подставим $\sqrt{x^2+y^2}$ вместо z. Получим $x^2+y^2=4$ – окружность – проекция на плоскость XOY линии пересечения этих поверхностей, а проекция на XOY самого тела T – круг, ограниченный этой окружностью: $x^2+y^2 \le 4$. Тело T можно задать неравенствами: $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$., т.е. $z_{\text{верхн}} = \sqrt{2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, $z_{\text{нижн}} = \sqrt{x^2+y^2}$ (см. Рис.18). Поэтому объем тела T равен

$$V(T) = \iint_D (z_{\text{в}}(x, y - z_{\text{н}}(x,y))dxdy = \iint_D \left(\sqrt{2+\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)} - \sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy ,$$

где D – круг радиуса 2 с центром в начале координат (см. Рис. 19) . Этот интеграл целесообразно вычислять в полярных координатах:

$$\iint_D \left(\sqrt{2+\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)} - \sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(\sqrt{2+\tfrac{1}{2}r^2} - r\right)\cdot r\cdot dr =$$

$$= 2\pi\cdot\left(\int_0^2 \sqrt{2+\tfrac{1}{2}r^2}\cdot r\cdot dr - \int_0^2 r^2 dr\right)$$

Второй интеграл, очевидно, равен $8/3$, а в первом интеграле сделаем замену: $t = 2+\frac{1}{2}r^2 \Rightarrow dt = r\cdot dr, r=0 \Rightarrow t=2, r=2 \Rightarrow t=4$. Получим:

$$\int_0^2 \sqrt{2+\tfrac{1}{2}r^2}\cdot r\cdot dr = \int_2^4 \sqrt{t}\cdot dt = \tfrac{2}{3}t^{3/2}\Big|_2^4 = \tfrac{2}{3}\left(8-2\sqrt{2}\right) .$$

Следовательно, $V(T) = 2\pi\cdot\left(\frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{8}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$.

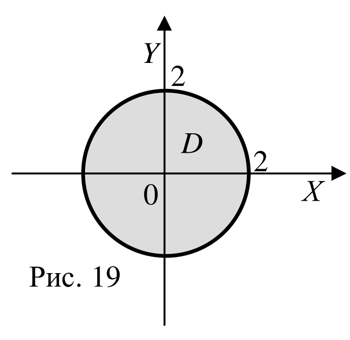

Рис. 19

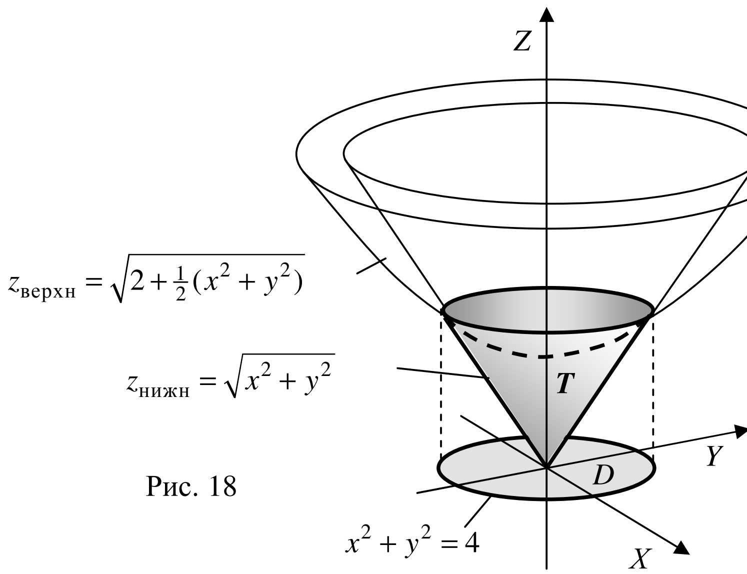

Рис. 18

4. Особенности вычисления двойных интегралов

4. 1. Вычисление двойного интеграла от распадающейся функции

Если подынтегральная функция $f(x, y)$ распадается в произведение двух функций, из которых одна зависит только от одной переменной, а другая – только от другой, а границы области интегрирования в повторном интеграле задаются **постоянными** функциями, то двойной интеграл равен произведению соответствующих определенных интегралов.

В **декартовых** координатах это имеет место, если область D – прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, а $f(x, y) \equiv g(x) \cdot h(y)$. Тогда верна формула:

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d g(x)h(y)dy = \left(\int_a^b g(x)dx\right) \cdot \left(\int_c^d h(y)dy\right).$$

Пример 9. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x, y) = e^{2x-y}$ по области D – прямоугольнику $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 3$.

Решение.

$$\iint_D e^{2x-y}dxdy = \iint_D e^{2x} \cdot e^{-y}dxdy = \int_0^1 e^{2x}dx \cdot \int_0^3 e^{-y}dy = \left(\tfrac{1}{2}e^{2x}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} \cdot \left(-e^{-y}\right)\Big|_{y=0}^{y=3} = \tfrac{1}{2}\left(e^2-1\right)\left(1-e^{-3}\right).$$

В **полярных** координатах справедлива аналогичная формула, если подынтегральную функцию можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от угла φ, а другая – только от радиуса r: $f(x, y) = g(\varphi) \cdot h(r)$, а область интегрирования ограничена линиями $\varphi = const$ (луч, выходящий из начала координат) и $r = const$ (окружность с центром в начале координат). Тогда имеет место формула:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_c^d g(\varphi) \cdot h(r) \cdot r \cdot dr = \left(\int_\alpha^\beta g(\varphi)d\varphi\right) \cdot \left(\int_c^d h(r) \cdot r \cdot dr\right)$$
.

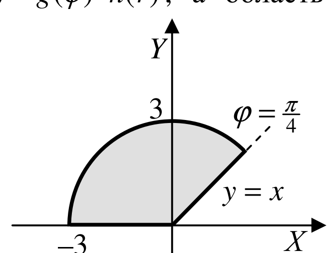

Рис. 20

Пример 10. Пусть область D – круговой сектор $y \geq x,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 9$ (см. Рис. 20), $f(x, y) = x^3 + xy^2$, тогда:

$$\iint_D (x^3 + xy^2)dxdy = \iint_D x\cdot(x^2 + y^2)dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^3 r\cos\varphi \cdot r^2 \cdot rdr =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\varphi d\varphi \cdot \int_0^3 r^4 dr = \left(\sin\varphi \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\pi} \right) \cdot \frac{243}{5} = -\frac{243\sqrt{2}}{10}.$$

4.2. Расположение декартовой системы координат при вычислении площади поверхности и объема тела в пространстве.

Указанные в п. 3.1. формулы (д) и (е) для вычисления площади поверхности и объема тела в пространстве применимы, когда поверхность или тело проецируется не только на координатную плоскость *XOY*, но и на *XOZ* или *YOZ*.

(а) Например, если поверхность σ задана уравнением $y = f(x, z)$, где $M(x; z) \in D \subset XOZ$, то площадь поверхности σ вычисляется по формуле:

$$S(\sigma) = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, z))^2 + (f'_z(x, z))^2}\, dxdz.$$

Рисунок в этом случае можно развернуть, направив, для наглядности ось *OY* вертикально вверх (см. Рис. 21).

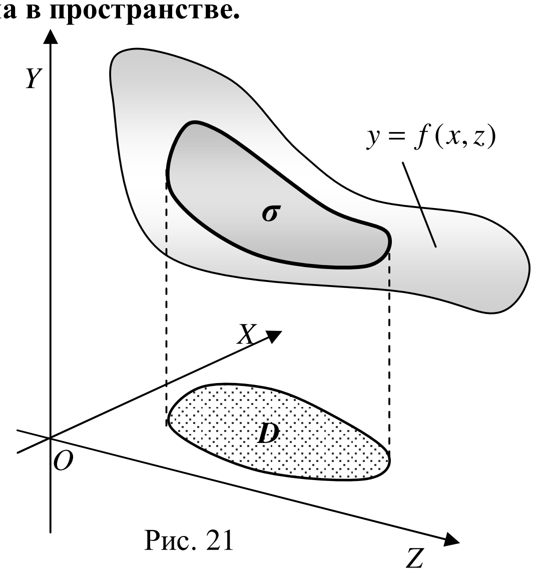

Рис. 21

(б) Аналогично, если тело T проецируется на плоскость *YOZ* в фигуру D и задано неравенствами $x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)$, $M(y; z) \in D \subset YOZ$, то объём тела T вычисляется по формуле:

$$V(T) = \iint_D \big(x_2(y, z) - x_1(y, z)\big)\, dydz.$$

В этом случае рисунок тоже лучше развернуть, направив, ось *OX* вертикально вверх (см. Рис. 22).

Пример 11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$2x + y - 4z - 1 = 0 \ (1) \ \text{ и } \ y = (x-1)^2 + z^2 \ (2).$$

Решение. Первая поверхность – это плоскость $2x + y - 4z - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - 2x + 4z$, а вторая – круговой <u>параболоид</u>([11]) с вершиной в точке $V(1; 0; 0)$, ось которого параллельна оси *OY*. Поэтому на чертеже ось *OY* удобно направить вертикально вверх. Найдем проекцию линии пересечения этих поверхностей на плоскость *XOZ*, для чего исключим переменную y из уравнений (1) и (2), т.е. подставим уравнение (2) в уравнение (1). Получим:

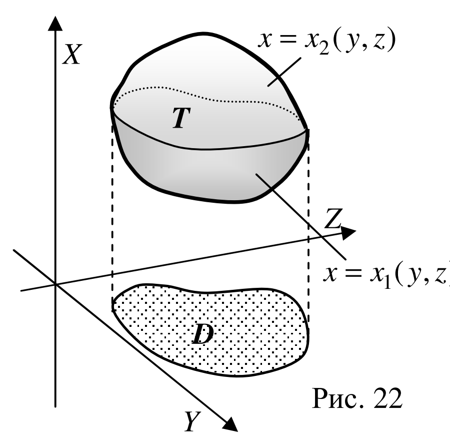

Рис. 22

$$2x+(x-1)^2+z^2-4z-1=0 \Leftrightarrow x^2+z^2-4z=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+(z-2)^2=4.$$

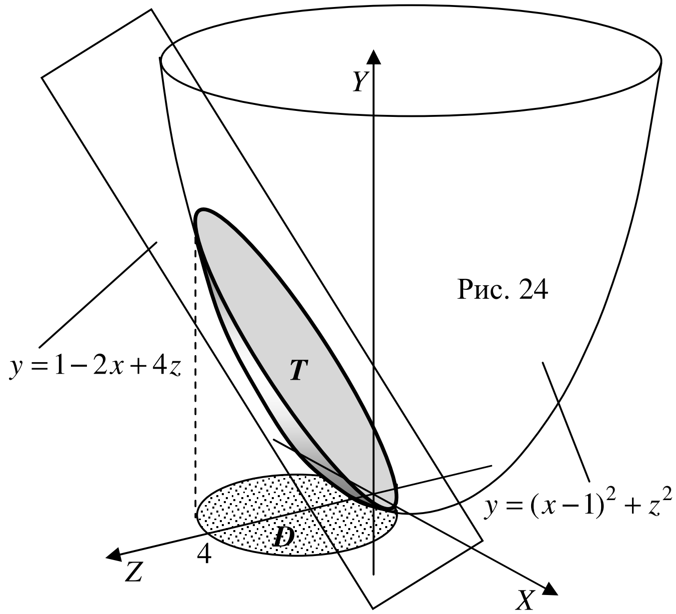

Рис. 24

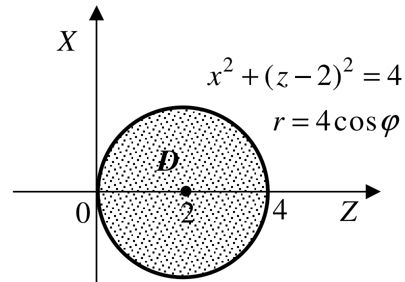

Рис. 23

Это окружность радиуса 2 с центром на оси OZ и проходящая через начало координат. Тело T проецируется на плоскость XOZ в круг D, ограниченный этой окружностью (см. Рис. 23). Тело T можно задать неравенствами

$$y_1(x,z)\equiv(x-1)^2+z^2 \le y \le 1-2x+4z \equiv y_2(x,z) \text{ (см. Рис. 24).}$$

Поэтому объем тела T равен

$$V(T)=\iint\limits_D \big(y_2(x,z)-y_1(x,z)\big)\,dxdz=$$
$$=\iint\limits_D \left(1-2x+4z-(x-1)^2-z^2\right)dxdz=$$
$$=\iint\limits_D \left(4z-x^2-z^2\right)dxdz.$$

Вычислим этот интеграл в полярных координатах, положив, например, $z=r\cos\varphi,\ x=r\sin\varphi,\ x^2+z^2=r^2$. Тогда уравнение окружности $x^2+(z-2)^2=4$ примет вид: $x^2+(z-2)^2=4 \Leftrightarrow x^2+z^2=4z \Leftrightarrow r^2=2r\cos\varphi \Leftrightarrow r=4\cos\varphi$. Поэтому

$$V(T)=\iint\limits_D \left(4z-x^2-z^2\right)dxdz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} (4r\cos\varphi-r^2)\cdot r\cdot dr=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} (4r^2\cos\varphi-r^3)dr=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(\cos\varphi\cdot\tfrac{4}{3}r^3-\tfrac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_{r=0}^{r=4\cos\varphi}=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\varphi\cdot\tfrac{256}{3}\cos^3\varphi-\tfrac{256}{4}\cos^4\varphi\right)d\varphi=\tfrac{128}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\, d\varphi=$$

$$=\tfrac{32}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2\varphi\right)^2 d\varphi=\tfrac{32}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\varphi+\tfrac12(1+\cos 4\varphi)\right)d\varphi=\tfrac{32}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\tfrac32+2\cos 2\varphi+\tfrac12\cos 4\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\tfrac{32}{3}\left(\tfrac32\varphi+\sin 2\varphi+\tfrac18\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=8\pi.$$

Мы воспользовались свойством определённого интеграла от **<u>четной</u>**([12]) функции $f(x)$ по отрезку, **симметричному** относительно начала координат: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=2\int\limits_0^a f(x)dx$.

Ответ: $V(T)=8\pi$.

Пример 12. Найти площадь поверхности σ:

$x+y^2+z^2=9,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

Решение. Данная поверхность представляет собой часть параболоида $x+y^2+z^2=9\Leftrightarrow x=9-y^2-z^2$, (симметричного относительно оси *OX*) ограниченного плоскостями $x=0$ и $y=0$, поэтому ось *OX* на чертеже удобно направить вертикально вверх (см. Рис. 25). Линия пересечения параболоида с плоскостью $x=0$ есть окружность $y^2+z^2=9$, а проекция поверхности σ на плоскость *YOZ* – полукруг *D*: $y^2+z^2\le 9,\ y\ge 0$ (Рис. 26).

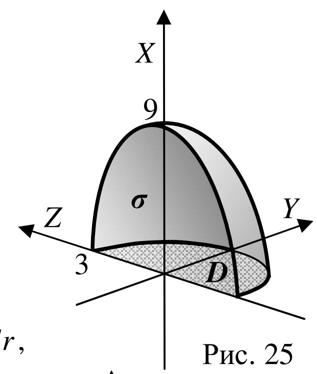

Рис. 25

$x'_y=-2y,\ x'_z=-2z\Rightarrow\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}=\sqrt{1+4y^2+4z^2}$.

Следовательно, площадь поверхности σ равна:

$$S(\sigma)=\iint\limits_D\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}dydz=\iint\limits_D\sqrt{1+4y^2+4z^2}dydz.$$

Вычислим этот интеграл также в полярных координатах:

$y=r\cos\varphi,\ z=r\sin\varphi,\ y^2+z^2=r^2$, Получим:

$$S(\sigma)=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^3\sqrt{1+4r^2}\cdot r\cdot dr=\begin{cases}t=1+4r^2\Rightarrow dt=8rdr,\\ r=0\Rightarrow t=1,\ r=3\Rightarrow t=3\end{cases}$$

$$=\tfrac18\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_1^{37}\sqrt{t}\cdot dt=\tfrac18\cdot\pi\cdot\tfrac23 t^{3/2}\Big|_1^{37}=\frac{\pi}{12}\left(37\sqrt{37}-1\right).$$

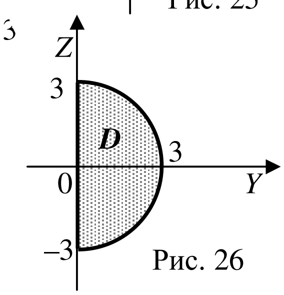

Рис. 26

Ответ: $S(\sigma)=\dfrac{\pi}{12}\left(37\sqrt{37}-1\right)$.

Вопросы для самоконтроля и задачи для самостоятельного решения.

1. Дайте определение двойного интеграла.
2. Что такое среднее значение функции двух переменной $f(x,y)$ в плоской области *D?*
3. Как вычисляется двойной интеграл: (а) в декартовых координатах; (б) в полярных координатах?

4. Как с помощью двойного интеграла найти: (а) массу плоской пластинки переменной плотности; (б) объем тела в пространстве; (в) площадь поверхности в пространстве?
5. Напишите формулы для нахождения координат центра масс плоской пластинки переменной плотности.
6. Что такое центроид геометрической фигуры? Напишите формулы для нахождения координат центроида плоской области.
7. Сформулируйте вторую формулу Гульдина.
8. Какую величину выражает двойной интеграл $\iint\limits_D p(x,y)dxdy$, если $p(x,y)$ – плотность населения в точке $M(x;y)$ региона D?
9. Вычислите среднее значение функции $f(x,y)=xy$ в прямоугольнике $1\le x\le 3, 0\le y\le 4$.
10. Проверьте теорему о среднем: нарисуйте множество точек внутри прямоугольника $1\le x\le 3, 0\le y\le 4$, для которых значение функции $f(x,y)=xy$ совпадает со средним.
11. Оцените сверху и снизу значение двойного интеграла $J=\iint\limits_D \sqrt{1+x^3+y^2}\,dxdy$, где D – прямоугольник $1\le x\le 3, 0\le y\le 4$.
12. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D (2x+3y)dxdy$, где область D – треугольник OAB, $A(3;0)$, $B(0;3)$.
13. Вычислите наиболее рациональным способом двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$ по области $D: 0\le y\le x, x^2+y^2\le 4$.
14. В повторном интеграле $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy$ измените порядок интегрирования и перейдите к полярным координатам.
15. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ по области D, изображенной на Рис. 27, расставьте пределы интегрирования в декартовых координатах, измените порядок интегрирования и перейдите к полярным координатам.

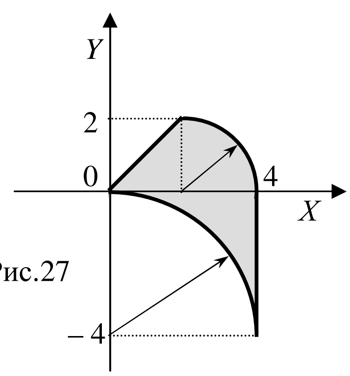

Рис.27

16. Найдите объем тела, заданного неравенствами $0\le z\le 1+x+y$, $y\ge 0$, $y^2\le x\le 4$.
17. Найдите площадь поверхности $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$, $x\le y\le 2x, x+y\le 6$.
18. Найдите координаты центроида области $x\ge 0, y\ge 0, y\le 2+x-x^2$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

8. Население региона *D*. **9.** $\hat{f} = 4$. **10.** Дуга гиперболы $xy = 4, 1 \le x \le 3$.

11. $8\sqrt{2} \le J \le 16\sqrt{11}$. **12.** $\frac{45}{2}$. **13.** $\frac{\pi}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)$.Указание: перейти к полярным координатам.

14. $\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx =$

$$= \int_0^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr + \int_{\operatorname{arctg} 2}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\sin\varphi-\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr.$$

15. $\int_0^2 dx \int_{-4+\sqrt{16-x^2}}^{x} f(x,y)dy + \int_2^4 dx \int_{-4-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy =$

$$= \int_{-4}^{0} dy \int_{\sqrt{-8y-y^2}}^{4} f(x,y)dx + \int_0^2 dy \int_y^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} d\varphi \int_{-8\sin\varphi}^{\frac{4}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr + \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr.$$

16. $V = \frac{332}{15}$. **17.** $S = 6$. **18.** $C\left(\frac{4}{5}; \frac{24}{25}\right)$.

Литература.

1. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. Серия «Математика в техническом университете», вып. 9. М.: МГТУ, 2001.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. Учебник для вузов. – Ростов-на-Дону : Феникс, 1997, 511 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: Учебник для вузов, часть 2. – М.: Физматлит,2001, 464 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб. пособие для втузов. Том 2.– М.: Интеграл-Пресс, 2001, 544 с.
5. Мельников Д.А., Филиновский А.В., Чуев В.Ю. Кратные интегралы: Методические указания к выполнению типового расчета, МГТУ им. Н.Э. Баумана – М., 1997.-54 с.

Глоссарий.

(1) **Замкнутое** множество – множество *D*, содержащее все свои граничные точки, т.е. точки, в каждой окрестности которой имеются как точки, принадлежащие, так и не принадлежащие множеству *D*.

(2) **Ограниченное** множество – множество, находящееся внутри некоторого круга или прямоугольника конечного размера.

(3) **Связное** (точнее, ***линейно связное***) множество *D* на плоскости – множество, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащий во множестве *D*.

(4) **Непрерывная функция.** Функция $f(x,y) = f(M)$, где $M(x;y)$, называется ***непрерывной в области*** *D*, если она непрерывна в каждой точке $M_0 \in D$ относительно множества *D*, т.е. если

$$\lim_{\begin{cases} M \to M_0 \\ M \in D \end{cases}} f(M) = f(M_0) \ .$$

На языке $\varepsilon - \delta$ это означает следующее:
Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек $M \in D$ если $|MM_0| < \delta$, то $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$. Всякая элементарная функция(8) одной или нескольких переменных непрерывна во всех точках, где определена.

(5) **Полярные координаты** на плоскости задаются началом отсчета точкой *P*, называемой ***полюсом***, и выходящей из неё лучом, называемой ***полярной осью***. Полярные координаты точки *M* – это пара чисел $(\varphi; r)$, где φ – ориентированный угол между полярной осью и вектором $\overline{PM}$, а $r = |PM| \geq 0$ – расстояние между точками *M* и *P* (вместо латинской буквы *r* иногда используется греческая буква ρ). Если совместить полярную и декартову системы координат естественным образом, т.е. так, чтобы полюс *P* совпал с началом координат *O*, а полярная ось совпала с положительным направлением оси *OX*, то декартовы координаты $M(x;\ y)$ и полярные координаты $M(\varphi; r)$ будут связаны соотношениями: $x = r \cdot \cos\varphi,\ \ y = r \cdot \sin\varphi,\ \ x^2 + y^2 = r^2$.

(6) **Якобиан** – дополнительный множитель, появляющийся в двойном интеграле при переходе от декартовых координат к другим координатам.

В общем случае ***якобианом*** системы двух дифференцируемых функций двух переменных $f(x,y)$ и $g(x,y)$ называется определитель

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Пусть при замене переменных в двойном интеграле старые координаты *x*, *y* выражаются через новые координаты *u*, *v* посредством функций $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, которые имеют непрерывные частные производные в области *E*, и при отображении посредством этих функций область *E* переходит в область *D*, а якобиан $J(u,v)$ системы этих функций

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

не обращается в ноль в области E, за исключением, быть может, нескольких точек. Тогда справедлива формула:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_E f(x(u,v),\,v(x,y)\cdot\left|J(u,v)\right|\cdot dudv$$

В случае перехода к полярным координатам(5) $x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi$, соответствующий якобиан равен

$$J(r,\varphi)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r}\\ \dfrac{\partial r}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r.$$

(7) **Центрóид** геометрической фигуры D – это центр масс этой фигуры, наделенной произвольной постоянной плотностью, например, равной единице. Координаты центроида $C(x_0;y_0)$ плоской фигуры D находятся по формулам:

$$x_0=\frac{M_x}{S(D)},\ \ y_0=\frac{M_y}{S(D)},\ \text{где}\ M_x=\iint\limits_D x\cdot dxdy,\ \ M_y=\iint\limits_D y\cdot dxdy,\ \ S(D)=\iint\limits_D dxdy.$$

(8) **Элементарная функция** – функция, заданная одной формулой и построенная с помощью четырех арифметических действий и операции композиции (взятия сложной функции) из простейших функций: константа, степенная, логарифмическая, показательная и логарифмическая, основные тригонометрические и обратные к ним.

(9) **Цилиндрическая поверхность** – поверхность, полученная поступательным движением в пространстве некоторой прямой, пересекающей некоторую линию L, называемой ***направляющей*** цилиндрической поверхности, и остающейся параллельной некоторой фиксированной прямой. Каждая из прямых, составляющих цилиндрическую поверхность, называется её ***образующей.*** Если поверхность задана в пространстве уравнением с двумя переменными, то эта поверхность – цилиндрическая, образующая которой параллельна оси, одноименной с отсутствующей переменной.

(10) **Гиперболоид** – поверхность в пространстве, заданная каноническим уравнением (с точностью до перестановки переменных):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm1.$$

Знак «плюс» справа соответствует однополостному гиперболоиду, а знак «минус» – двуполостному. При $a=b$ гиперболоид является поверхностью вращения, а именно он может быть получен вращением вокруг оси OZ гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm1.$$

(11) **Параболоид** – поверхность в пространстве, заданная каноническим уравнением (с точностью до перестановки переменных):

$$\frac{x^2}{p}\pm\frac{y^2}{q}=2z,\ \text{где}\ p,q>0.$$

Вершина такого параболоида находится в начале координат. Знак «плюс» слева соответствует ***эллиптическому*** параболическому, а знак «минус» – ***гиперболическому***. В первом случае при $p = q$ параболоид называется ***круговым***, или параболоидом вращения, т.к. может быть получен вращением вокруг оси OZ параболы $x^2 = 2pz$. Второй (гиперболический параболоид) имеет форму седла.

Уравнение $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} \pm \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = (z-z_0)$ задает «смещенный» гиперболоид с вершиной в точке $V(x_0;\, y_0;\, z_0)$

(12) **Четная функция** – функция $f(x)$, область определения D которой симметрична относительно нуля, и для которой $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in D$. Нечетная функция – функция $f(x)$, область определения D которой симметрична относительно нуля, и для которой $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in D$.

(13) **Гульдин Пауль** (1577–1643) – швейцарский математик. Написал работу о центрах тяжести тел, в которой также трактуются вопросы о поверхностях и объёмах тел. С его именем связан ряд теорем для определения объёмов и поверхностей тел вращения.

(14) **Центр масс** конечной системы материальных точек $P_1, \ldots, P_k$, в которых сосредоточены массы $m_1, \ldots, m_k$, – это такая точка C, что

$$\overline{OC} = \frac{1}{m_1 + \ldots + m_k}\left(m_1 \cdot \overline{OP_1} + \ldots + m_k \cdot \overline{OP_k}\right),$$

где O – точка отсчета. Положение точки C в пространстве не зависит от выбора точки отсчета O. Декартовы координаты центра масс $C(x_0;\, y_0;\, z_0)$ выражаются через координаты точек $P_i(x_i;\, y_i;\, z_i)$, $i = 1, \ldots, k$ по формулам:

$$x_0 = \frac{1}{m_1 + \ldots + m_k}\left(m_1 \cdot x_1 + \ldots + m_k \cdot x_k\right), \quad y_0 = \frac{1}{m_1 + \ldots + m_k}\left(m_1 \cdot y_1 + \ldots + m_k \cdot y_k\right),$$

$$z_0 = \frac{1}{m_1 + \ldots + m_k}\left(m_1 \cdot z_1 + \ldots + m_k \cdot z_k\right).$$

В случае непрерывного распределения массы (вдоль линии, по поверхности или пространственному телу) для определения положения центра масс нужен интеграл.

Содержание