Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана.

Соболев С.К.

Дифференциальные уравнения

Методические указания к решению задач

Москва
МГТУ им. Баумана
2008

Предисловие.

В обычной школьной математике школьники привыкли, что в задачах и уравнениях, к которым эти задачи сводятся, неизвестными являются одно или несколько **чисел**, т.е. **постоянных** величин. Однако с развитием математики и более глубоким осознанием возникающих проблем, которые можно было решить, применяя математику, стали появляться задачи, в которых неизвестными являются не постоянные величины, а переменные, т.е. **функции**. Уравнения, содержащие неизвестную функцию, которую надо найти, называются ***функциональными***. Большой класс функциональных уравнений связывает между собой аргумент, искомую функцию и её производную. Как правило, аргументом является время. Например, при прямолинейном движении точки уравнение $F(t, x, v, a) = 0$ связывает координату $x(t)$ точки, её скорость $v(t) = \frac{dx}{dt}$ и ускорение $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ в любой момент времени t, что может быть записано в виде $F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0$. Уравнение, связывающие аргумент, искомую функцию и её одну или несколько первых производных, называется ***дифференциальным уравнением***. Оказывается, дифференциальными уравнениями связаны между собой многие физические величины, например, величина заряда на конденсаторе, электрический ток и скорость его изменения в замкнутом контуре. Дифференциальными уравнениями описываются многие процессы в технике, химии, экономике, биологии, психологии и т.д.

Дифференциальное уравнение, в котором, кроме аргумента и искомой функции входят производные искомой функции вплоть до n-го порядка, называется ***дифференциальным уравнением n-го порядка***. Если дифференциальное уравнение содержит неизвестную функцию одного аргумента, то оно называется ***обыкновенным***. А если неизвестная функция зависит от двух или большего числа аргументов и в уравнение входят частные производные этой функции, то тогда оно называется ***дифференциальным уравнением с частными производными***. В настоящем пособии рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения. Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет бесконечное число решений, зависящих от n произвольных констант. Чтобы найти значения этих констант, надо еще задать дополнительные **начальные условия**.

В настоящем пособии разбираются методы решения дифференциальных уравнений, в основном, первого и второго порядка. Подробно разбираются линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, метод Лагранжа и метод неопределенных коэффициентов. Данное пособие будет полезно студентам экономических и технических специальностей.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

1.1. Введение в дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение (ДУ) первого порядка имеет вид $F(x, y, y') = 0$, где x – аргумент, $y = y(x)$ – неизвестная функция (которую надо найти), $y' = \dfrac{dy}{dx}$ – её производная. Его решение надо начать с того, что привести его в виду: $y' = f(x, y) \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – известная функция.

Дифференциальное уравнение имеет бесконечное число различных решений. Каждое из таких решений называется ***частным решением***. Совокупность всех частных решений называется ***общим решением*** дифференциального уравнения. Общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную константу *C*, т.е. имеет вид $y = \varphi(x, C)$; это значит, что при любом значении $C = C_0$ функция $y(x, C_0)$ является решением, и любое частное решение можно найти из общего, подобрав соответствующее значение константы *C*. Если задано дополнительное ***начальное условие*:** $y(x_0) = y_0$, то, как привило, можно найти единственное частное решение, удовлетворяющее ему.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ называется ***задачей Коши.*** Решение дифференциального уравнения может быть получено как в **явном** виде $y = y(x)$ (*y* выражено через *x*), так и в **неявном**, т.е. в виде $G(x, y) = 0$ (когда не удается явно выразить *y* через *x*). В последнем случае решение дифференциального уравнения называется ***интегралом*** этого ДУ.

Теорема Коши. *Если в некоторой (двумерной) окрестности*[1] *точки* $M_0(x_0; y_0)$ *функция* $f(x, y)$ *и её частная производная по y* $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ *непрерывны, то найдется такая (одномерная) окрестность точки* x_0 *в которой решение задачи Коши* $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, *существует и единственно.*

1.2. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения.

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = f(x, y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Мы будем классифицировать эти уравнения в зависимости от вида функции $f(x, y)$.

1) $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ – дифференциальное уравнение ***с разделяющимися переменными***. В этом случае дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y).$$

[1] ***Окрестность*** точки M_0 на плоскости – это внутренность круга или квадрата с центром в данной точке M_0.

Метод решения: разделить переменные (т.е. отделить их друг от друга), а затем проинтегрировать:

$$\frac{dy}{dx}=g(x)\cdot h(y)\Leftrightarrow \frac{dy}{h(y)}=g(x)\cdot dx\Rightarrow \int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx\Rightarrow H(y)=G(x)+C\ .$$

2) $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ – дифференциальное уравнение ***с однородной***[2] ***правой частью,*** т.е. данное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\tfrac{y}{x}\right)$$

Метод решения: ввести новую неизвестную $u=u(x)=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=x\cdot u\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=u+x\cdot\dfrac{du}{dx}$, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\tfrac{y}{x}\right)\Leftrightarrow u+x\cdot\frac{du}{dx}=\varphi(u)\Leftrightarrow \frac{du}{dx}=\frac{\varphi(u)-u}{x}\Leftrightarrow \frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим функцию $u(x)$, а затем и $y(x)=x\cdot u(x)$.

3) $f(x,y)=A(x)\cdot y+B(x)$ (где $A(x)$ и $B(x)$ – некоторые известные функции) – ***линейное*** дифференциальное уравнение, т.е. вида $y'=A(x)\cdot y+B(x)$.

Метод решения: существуют два метода решения этого уравнения, которые различаются лишь обозначениями.

Первый метод *(метод Бернулли)*: Решение линейного дифференциального уравнения $y'=A(x)\cdot y+B(x)$ ищут в виде произведения двух функций $y=u(x)\cdot v(x)$, которые находят по формулам:

$$u(x)=e^{\int A(x)dx}\ \text{(без произвольной константы)}$$

$$v(x)=\int\frac{B(x)}{u(x)}dx\ \text{(с произвольной константой).}$$

Обоснование: пусть $y=u(x)\cdot v(x)$, тогда $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$, подставим в ДУ (*), получим

$$u'\cdot v+u\cdot v'=A(x)\cdot u\cdot v+B(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$v\cdot(u'-A(x)\cdot u)+u\cdot v'=B(x)$$

Мы имеем одно дифференциальное уравнение с двумя неизвестными функциями $u(x)$ и $v(x)$. Однозначно эти функции найти нельзя. Добавим еще одно условие, а именно, положим равной нулю выражение в скобках в последнем уравнении. Получим систему

[2] ***однородная функция*** порядка k– функция нескольких переменных $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, для которой выполняется равенство $f(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n)=\lambda^k\cdot f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ для любого $\lambda\in\mathbf{R}$. Однородная функция нулевого порядка называется просто ***однородной,*** для неё выполняется условие: $f(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Однородная функция двух переменных $f(x,y)$ зависит только от отношения переменных, т.е. имеет вид $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u' - A(x)\cdot u = 0, \\ u\cdot v' = B(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = A(x)\cdot u \\ u(x)\cdot \dfrac{dv}{dx} = B(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int \dfrac{du}{u} = \int A(x)dx \\ \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{B(x)}{u(x)} \end{cases}$$

Возьмем частное решение первого уравнения $u(x) = e^{\int A(x)dx}$ и подставим его во второе, получим $v = \int \dfrac{B(x)}{u(x)} dx$.

Второй способ решения линейного ДУ $y' = A(x)\cdot y + B(x)$:
(***метод Лагранжа вариации постоянной).***

Сначала решим соответствующее линейное **однородное** ДУ

$$y' = A(x)\cdot y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = A(x)\cdot y .$$

Решив это уравнение, получим его общее решение $y = C\cdot y_1(x)$, где $y_1(x) = e^{\int A(x)dx}$.

Общее решение **неоднородного** линейного дифференциального уравнения $y' = A(x)\cdot y + B(x)$ будем искать в виде $y = C(x)\cdot y_1(x)$, где функцию $C(x)$ надо найти. Найдем производную $y' = C'(x)\cdot y_1(x) + C(x)\cdot y_1'(x)$ и подставим её в неоднородное ДУ $y' = A(x)\cdot y + B(x)$, получим:

$$C'(x)\cdot y_1(x) + C(x)\cdot y_1'(x) = A(x)\cdot C(x)\cdot y_1(x) + B(x) .$$

Поскольку $y_1' \equiv A(x)\cdot y_1 \Rightarrow C(x)\cdot y_1' \equiv C(x)\cdot A(x)\cdot y_1$, получим такое уравнение:

$C'(x)\cdot y_1(x) = B(x)$, из которого находим $C'(x) = \dfrac{B(x)}{y_1(x)}$, интегрируя которого находим $C(x)$ (при этом возникает настоящая произвольная постоянная).

Понятно, что эти два метода различаются лишь обозначениями:

$$u(x) = y_1(x), v(x) = C(x) .$$

4) $f(x, y) = A(x)\cdot y + B(x)\cdot y^{\alpha}$, (где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$)
– дифференциальное уравнение ***типа Бернулли*** , т.е. это ДУ вида

$$y' = A(x)\cdot y + B(x)\cdot y^{\alpha} .$$

Для этого ДУ также существуют два метода решения: ***метод Бернулли*** и ***метод сведения к линейному ДУ***.

Первый метод: метод Бернулли**.**

пусть $y = u(x)\cdot v(x)$, тогда $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$, подставим в ДУ (*), получим

$$u'\cdot v + u\cdot v' = A(x)\cdot u\cdot v + B(x)\cdot u^{\alpha}\cdot v^{\beta}$$

$$\Updownarrow$$

$$v\cdot (u' - A(x)\cdot u) + u\cdot v' = B(x)\cdot u^{\alpha}\cdot v^{\beta}$$

Опять положим равной нулю выражение в скобках в последнем уравнении. Получим систему дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = A(x)\cdot u \\ u\cdot\dfrac{dv}{dx} = B(x)\cdot u^{\alpha}\cdot v^{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int\frac{du}{u} = \int A(x)dx \\ \displaystyle\int\frac{dv}{v^{\alpha}} = \int B(x)\cdot\left(u(x)\right)^{\alpha-1}dx \end{cases}$$

Из первого уравнения находим функцию $u(x)$ (без произвольной константы), а из второго – функцию $v(x)$ (с произвольной константой C).

Второй метод решения дифференциального уравнения Бернулли: сведение его к линейному ДУ.

Умножим обе части уравнения Бернулли

$$y' = A(x)\cdot y + B(x)\cdot y^{\alpha}$$

на $(1-\alpha)y^{-\alpha}$, введем новую переменную $z = y^{1-\alpha}$, тогда $z'_x = (1-\alpha)\cdot y^{-\alpha}\cdot y'_x$ и получится линейное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $z(x)$:

$$z'_x = (1-\alpha)A(x)\cdot z + (1-\alpha)B(x) \Leftrightarrow z'_x = A_1(x)\cdot z + B_1(x),$$

где $A_1(x) = (1-\alpha)A(x)$, $B_1(x) = (1-\alpha)B(x)$.

Решая это линейное ДУ методом Бернулли или (что почти одно и тоже) методом Лагранжа, находим функцию $z(x)$, а затем и $y(x) = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

5) если дифференциальное уравнение первого порядка $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ не является ни одним из этих четырех видов, надо его «перевернуть», т.е. записать в виде $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(x,y)}$.

При этом часто получается линейное ДУ

$$\frac{dx}{dy} = A(y)\cdot x + B(y), \tag{1}$$

или ДУ типа Бернулли

$$\frac{dx}{dy} = A(y)\cdot x + B(y)\cdot x^{\alpha} \tag{2}$$

относительно неизвестной функции $x(y)$, которые решаем вышеописанными способами с тем исключением, что во всех формулах x и y меняются местами.

А именно, решение дифференциального уравнения (1) ищется в виде $x = u(y)\cdot v(y)$, где

$u(y) = e^{\int A(y)dy}$, $v(y) = \displaystyle\int\frac{B(y)}{u(y)}dy$,

а дифференциальное уравнение (2) сводится к линейному ДУ умножением обеих частей на $(1-\alpha)x^{-\alpha}$ и введением новой переменной $z = x^{1-\alpha}$, получится $z'_y = A_1(y)\cdot z + B_1(y)$.

6) Если дифференциальное уравнение имеет вид $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, то его надо сначала привести к виду $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)} \equiv f(x,y)$, определить вид данного ДУ и применить один из вышеописанных методов. Если оно не является дифференциальным уравнением ни одного из вышеуказанных четырех видов, то надо проверить, не является ли выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$,

т.е. проверить, существует ли такая функция $U(x,y)$, что $\dfrac{\partial U}{\partial x} \equiv P(x,y), \dfrac{\partial U}{\partial y} \equiv Q(x,y)$ во всех точках области Ω, в которой ищется решение данного дифференциального уравнения. Как известно из курса дифференциального исчисления функций нескольких переменных, если область Ω односвязна, такая функция $U(x,y)$ существует тогда и только тогда, когда и во всех точках этой области выполняется условие

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Если это условие выполнено, то данное ДУ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется ***дифференциальным уравнением в полных дифференциалах***. Чтобы его решить, надо найти функцию $U(x,y)$:

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx\Big|_{y=const} = F(x,y) + C(y).$$

Для нахождения функции $C(y)$ надо найти $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial y} + C'_y$ и приравнять функции $Q(x,y)$.

Если требуемая функция $U(x,y)$ найдена, то общее решение данного ДУ имеет вид

$$U(x,y) = C.$$

1.3. Примеры решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Пример 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка:

(а) $(x^2+3)dy + y\sqrt{x^2+3}\,dx = xydx$;

(б) $x(dx-dy) = y(dy+dx)$;

(в) $x(y'-1) + y = 2x\ln x$;

(г) $y' = \dfrac{y}{x-y^4}$;

(д) $\left(3x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x-y^2}}\right)dx + \left(2\cos 2y - \dfrac{2y}{\sqrt{x-y^2}}\right)dy = 0$

Решение. (а) Запишем данное ДУ в виде $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$:

$$(x^2+3)dy + y\sqrt{x^2+3}\,dx = xydx \Leftrightarrow (x^2+3)dy = y(x-\sqrt{x^2+3})\,dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(x-\sqrt{x^2+3})}{x^2+3}$$

Правая часть этого ДУ имеет вид произведения двух функций: одной, зависящей только от *x*, и другой, зависящей только от *y*, т.е. это **ДУ с разделяющимися переменными**. Разделяем их (т.е. отделяем их друг от друга) и интегрируем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-\sqrt{x^2+3})}{x^2+3} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \left(\frac{x}{x^2+3} - \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\frac{x\,dx}{x^2+3} - \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} \Leftrightarrow \ln|y| = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+3) - \ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right| + C.$$

Отсюда

$$\ln\left|\frac{y(x+\sqrt{x^2+3})}{\sqrt{x^2+3}}\right| = C \Rightarrow \frac{y(x+\sqrt{x^2+3})}{\sqrt{x^2+3}} = \pm e^C \Rightarrow y = C_1\frac{\sqrt{x^2+3}}{x+\sqrt{x^2+3}}, \text{ где } C_1 = \pm e^C.$$

(б) Запишем данное ДУ в виде $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$:

$$x(dx-dy)=y(dy+dx)\Leftrightarrow(x-y)dx=(y+x)dy\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}.$$

Это **ДУ с однородной правой частью**, т.к. его правая часть зависит только от отношения $\dfrac{y}{x}$. Положим $u=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=x\cdot u\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=u+x\cdot\dfrac{du}{dx}$, тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}\Leftrightarrow u+x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1-u}{1+u}\Leftrightarrow x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1-u}{1+u}-u=\frac{1-u-u-u^2}{1+u}\Rightarrow$$

Получили ДУ с разделяющимися переменными, решим его:

$$\frac{(u+1)du}{1-2u-u^2}=\frac{dx}{x}\Rightarrow-\int\frac{(u+1)du}{u^2+2u-1}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow-\tfrac{1}{2}\ln\left|u^2+2u-1\right|=\ln|x|+\ln C\Rightarrow$$

$$x\cdot\sqrt{u^2+2u-1}=C\Rightarrow x\cdot\sqrt{\left(\tfrac{y}{x}\right)^2+2\tfrac{y}{x}-1}=C\Rightarrow x^2\left(\tfrac{y^2}{x^2}+2\tfrac{y}{x}-1\right)=C^2\Rightarrow y^2+2xy-x^2=C_1$$

(в) Запишем данное ДУ в виде $y'=f(x,y)$: $x(y'-1)+y=2x\ln x\Leftrightarrow y'=-\dfrac{y}{x}+2\ln x+1$.

Это **линейное ДУ**, т.к. оно имеет вид $y'=A(x)y+B(x)$, где $A(x)=-\frac{1}{x}$, $B(x)=2\ln x+1$.
Решение ищем в виде $y=u(x)\cdot v(x)$, где

$$u(x)=e^{\int A(x)dx}=e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{-\ln x}=\left(e^{\ln x}\right)^{-1}=\frac{1}{x};$$

$$v(x)=\int\frac{B(x)}{u(x)}dx=\int(2x\ln x+x)dx=\{\text{по частям}\}=x^2\ln x+C.$$

Следовательно, $y=u\cdot v=\frac{1}{x}\cdot\left(x^2\ln x+C\right)=x\ln x+\dfrac{C}{x}$.

(г) Дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x-y^4}$ не принадлежит ни к одному из известных нам типов, поэтому попробуем «перевернуть» его, получим: $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{y}-y^3$. Это **линейное ДУ** относительно неизвестной функции $x(y)$, $A(y)=\frac{1}{y}$, $B(y)=-y^3$, его решение ищем в виде $x=u(y)\cdot v(y)$, где $u(y)=e^{\int\frac{dy}{y}}=e^{\ln y}=y$, $v(y)=\int\dfrac{B(y)}{u(y)}dy=-\int\dfrac{y^3}{y}dy=-\frac{1}{3}y^3+C$,

поэтому общее решение есть $x=y(C-\frac{1}{3}y^3)=Cy-\frac{1}{3}y^4$.

(д) Если записать данное ДУ в виде $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$, то получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+\frac{1}{\sqrt{x-y^2}}}{\frac{2y}{\sqrt{x-y^2}}-2\cos 2y}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2\sqrt{x-y^2}+1}{2y-2\cos 2y\cdot\sqrt{x-y^2}}.$$

Это дифференциальное уравнение не принадлежит ни к одному из первых четырех типов.
Поэтому проверим, не является ли исходное ДУ

$$\left(3x^2+\frac{1}{\sqrt{x-y^2}}\right)dx+\left(2\cos 2y-\frac{2y}{\sqrt{x-y^2}}\right)dy=0$$

уравнением в полных дифференциалах. Здесь

$$P(x,y)=3x^2+\frac{1}{\sqrt{x-y^2}},\ Q(x,y)=2\cos 2y-\frac{2y}{\sqrt{x-y^2}},$$

$$Q'_x=\frac{y}{(x-y^2)^{3/2}}=P'_y.$$

Следовательно, левая часть данного дифференциального уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$ и

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)=3x^2+\frac{1}{\sqrt{x-y^2}},\ \frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)=2\cos 2y-\frac{2y}{\sqrt{x-y^2}}.$$

Найдем функцию $U(x,y)$:

$$U(x,y)=\int P(x,y)dx\Big|_{y=const}=\int\left(3x^2+\tfrac{1}{\sqrt{x-y^2}}\right)dx=$$

$$=x^3+2\sqrt{x-y^2}+C(y).$$

Но

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(x^3+2\sqrt{x-y^2}+C(y)\right)'_y=\frac{2y}{x-y^2}+C'(y)=$$

$$=Q(x,y)=2\cos 2y-\frac{2y}{\sqrt{x-y^2}}$$

Следовательно, $C'(y)=2\cos 2y\Rightarrow C(y)=\sin 2y$.

Окончательно, $U(x,y)=x^3+2\sqrt{x-y^2}+\sin 2y$, и решение нашего ДУ имеет вид

$x^3+2\sqrt{x-y^2}+\sin 2y=C$

Ответы: (а) $y=C_1\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x+\sqrt{x^2+3}}$; (б) $y^2+2xy-x^2=C_1$; (в) $y=x\ln x+\dfrac{C}{x}$;

(г) $x=Cy-\frac{1}{3}y^4$.; (д) $x^3+2\sqrt{x-y^2}+\sin 2y=C$.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

(а) $y'=(4x+y+1)^2$, $y(0)=1$;

(б) $xdy+(y-\frac{1}{2}y^3x)dx=0,\ \ y(1)=1/2$.

Решение. (а) Сделаем замену $z=4x+y+1$, тогда $z'_x=4+y'_x\Rightarrow y'_x=z'_x-4$, подставим в исходное ДУ, получим ДУ с разделяющимися переменными:

$$y'=(4x+y+1)^2\Leftrightarrow z'-4=z^2\Leftrightarrow\frac{dz}{dx}=z^2+4\Rightarrow\frac{dz}{z^2+4}=dx\Rightarrow$$

$$\int\frac{dz}{z^2+4}=\int dx\Rightarrow\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{2}=x+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+y+1=z=2\operatorname{tg}(x+C)\Rightarrow y=2\operatorname{tg}(x+C)-4x-1.$$

Подставим начальное условие $(x=0,\ y=1)$ и определим значение константы C:

$1 = 2\operatorname{tg}(C) - 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $y = 2\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 4x - 1$.

(б) Запишем данное ДУ в виде $y' = f(x,y)$:

$$xdy + (y - \tfrac{1}{2}y^3x)dx = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y'_x = -\tfrac{1}{x}y + \tfrac{1}{2}y^3.$$

Это ДУ типа Бернулли с показателем $\alpha = 3$. Умножим обе части этого ДУ на $(1-\alpha)y^{-\alpha} = -2y^{-3}$ и положим $z = y^{1-\alpha} = y^{-2}$. Тогда $z'_x = -2y^{-3}y'_x$, и получим линейное ДУ относительно неизвестной функции $z(x)$:

$$-2y^{-3}y'_x = \tfrac{2}{x}y^{-2} - 1 \Leftrightarrow z'_x = \tfrac{2}{x}\cdot z - 1$$

Решим его:

$$z = u(x)\cdot v(x),\ u(x) = e^{\int\frac{2dx}{x}} = e^{2\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^2 = x^2,\ v(x) = -\int\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x} + C,$$

$$z = u\cdot v = x^2\left(\frac{1}{x} + C\right) = x + Cx^2 = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{x + Cx^2}}$$

Подставляем начальное условие $(x=1,\ y=\frac{1}{2})$, получаем знак «плюс» и $C = 3$.

Окончательно $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+3x^2}}$

Ответы: (а) $y = 2\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 4x - 1.$; (б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+3x^2}}$.

1.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

(а) $y' = x^2y^3$; (б) $y' = \dfrac{\sin y}{\sqrt{x^2+3}}$; (в) $y' = e^{x+y}$; (г) $dy - 2\sqrt{y}\ln x\,dx = 0$;

(д) $(1+y)(e^x dx - e^{2y}dy) = (1+y^2)dy$; (е) $y' = \sin(y - x - 1)$

[**указание**: ввести новую переменную $z = y - x - 1 \Rightarrow y = z + x + 1,\ y'_x = z'_x + 1$].

(ж) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right)$; (з) $y^2dx + x^2dy = xydy$; (и) $xdy - y\cos\left(\ln(\frac{y}{x})\right)dx = 0$;

(к) $(\sin 2x + 2e^{2x-y})dx + \left(\cos 3y - e^{2x-y}\right)dy = 0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

(а) $y'\operatorname{tg}x = y,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1$; (б) $(y + \sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0$, $y(1) = 0$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

(а) $y' = \dfrac{3y}{x} + x$.; (б) $y'\cos x + y\sin x = 1$; (в) $(1+y^2)dx + (x - \operatorname{arctg} y)dy = 0$;

(г) $y + y'\ln^2 y = (x + 2\ln y)y'$; (д) $y - y' = y^2 + xy'$; (е) $ydx + dy = y^2e^x dx$;

(ж) $y'x^3\sin y + 2y = xy'$.

4. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

(а) $x + y' = 2y + e^x$, $y(0) = \frac{1}{4}$; (б) $3dy + (1+3y^2)y\sin x\,dx = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

2. Дифференциальные уравнения высших порядков.

2.1. Основные сведения

Дифференциальное уравнение **второго порядка** имеет вид $F(x, y, y', y'') = 0$, где $y = y(x)$ – неизвестная функция, которую надо найти. Общее решение такого ДУ зависит от двух произвольных констант C_1 и C_2, значения которых можно найти, если заданы начальные условия: значение искомой функции и её производной в некоторой точке: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, получится частное решение. Дифференциальное уравнение вида $y'' = f(x, y, y')$, где f – известная функция трех переменных, вместе с начальными условиями называется ***задачей Коши***.

Теорема Коши. *Если в некоторой (трехмерной) окрестности*[3] *точки* $M_0(x_0; y_0; y_1)$ *функция* $f(x, y, y')$ *и её частные производные* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ *непрерывны, то найдется такая (одномерная) окрестность точки* x_0, *в которой решение задачи Коши* $y' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, *существует и единственно.*

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, где $y = y(x)$ – неизвестная функция. Общее решение такого ДУ зависит от n произвольных констант $C_1, C_2, ..., C_n$, значения которых можно найти, если заданы начальные условия: значение искомой функции и её производных порядка от 1 до $(n-1)$ включительно в некоторой точке: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, получится частное решение.

2.2. Методы понижения порядка ДУ второго и высших порядков.

1) Простейшее дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид $y^{(n)} = f(x)$, где $f(x)$ – известная функция. Решение такого дифференциального уравнения находится n-кратным последовательным интегрированием функции $f(x)$, при каждом интегрировании возникает аддитивная постоянная.

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' = \sin 2x$.

Решение. Последовательно находим:

$$y'' = \int y'''(x)dx = \int \sin 2x dx = -\tfrac{1}{2}\cos 2x + C_1,$$

$$y' = \int y''(x)dx = \int \left(-\tfrac{1}{2}\cos 2x + C_1\right) dx = -\tfrac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int y'(x)dx = \int \left(-\tfrac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2\right) = \tfrac{1}{8}\cos 2x + \tfrac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

Общее решение содержит три произвольные константы ($\overline{C}_1 = \tfrac{1}{2}C_1$):

$$y = \tfrac{1}{8}\cos 2x + \overline{C}_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Далее рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений второго порядка, которые с помощью подходящей замены сводятся к дифференциальным уравнениям первого порядка.

---

[3] ***Окрестность*** точки M_0 в пространстве – это внутренность шара или куба с центром в данной точке M_0.

2) ДУ второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ **не содержит явно *y***, т.е. имеет вид $F(x, y', y'') = 0$. **Метод решения:** ввести новую переменную $p = p(x)$, тогда $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d(y')}{dx} = \dfrac{dp}{dx} = p'_x$. Получится ДУ первого порядка $F(x, p, p'_x) = 0$, решив которое, находим функцию $p(x) = y'_x$ (зависящую от константы C_1), затем с помощью интегрирования находим $y(x) = \int p(x)dx$ (при этом появится вторая константа C_2).

Пример 4: Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' \sin x - y' \cos x = \cos 2x - \cos 4x .$$

Решение: Поскольку данное ДУ второго порядка не содержит явно *y*, положим $p = p(x)$, тогда $y'' = p'_x$, получится линейное ДУ первого порядка относительно неизвестной функции $p(x)$: $p' \sin x - p \cos x = \cos 2x - \cos 4x \Leftrightarrow p' = p \cdot \operatorname{ctg} x + 2 \sin 3x$

(поскольку $\cos 2x - \cos 4x \equiv 2 \sin x \sin 3x \equiv 2 \sin^2 x \cdot (3 - 4 \sin^2 x) \equiv 2 \sin^2 x \cdot (1 + 2 \cos 2x)$.

Здесь $A(x) = \operatorname{ctg} x, B(x) = 2 \sin 3x$.

Решая это ДУ, находим: $p = u(x) \cdot v(x)$, $u(x) = e^{\int A(x)\,dx} = e^{\int \operatorname{ctg} x\,dx} = e^{\ln(\sin x)} = \sin x$,

$v(x) = \int \dfrac{B(x)}{u(x)} dx = \int \dfrac{2 \sin 3x}{\sin x} dx = 2 \int (1 + 2 \cos 2x)\,dx = 2x + 2 \sin 2x + C_1$,

$y' = p = \sin x(2x + 2 \sin 2x + C_1) = 2x \cdot \sin x + 2 \sin x \cdot \sin 2x + C_1 \sin x$.

Теперь находим и саму функцию

$$y(x) = \int y' dx = \int \left(2x \cdot \sin x + \cos x - \cos 3x + C_1 \sin x\right) =$$
$$= -2x \cos x + 2 \sin x + \sin x - \tfrac{1}{3} \sin 3x - C_1 \cos x + C_2$$

Ответ: $y = -2x \cos x + 3 \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x - C_1 \cos x + C_2$.

3) ДУ второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ **не содержит явно *x***, т.е. имеет вид $F(y, y', y'') = 0$. **Метод решения**: ввести новую переменную $p = p(y)$, тогда, по формуле производной сложной функции, $y'' = \dfrac{d(y')}{dx} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p'_y \cdot p$. Получится ДУ первого порядка $F(y, p, p'_y \cdot p) = 0$, решив которое, находим функцию $p(y) = y'_x = \dfrac{dy}{dx}$ (она будет содержать также произвольную константу C_1). Последнее уравнение есть ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, интегрируя его $dx = \dfrac{dy}{p(y)} \Rightarrow \int dx = \int \dfrac{dy}{p(y)}$, получаем искомое решение (в неявной форме) содержащее вторую произвольную константу.

Замечание. Если заданы начальные условия и не требуется получить общее решение (а только частное), то значения каждой константы следует находить **сразу после её появления** подстановкой начальных условий.

Пример 5: Найти частное решение для ДУ второго порядка

$$y \cdot y'' = (y')^2 - y^2$$

с начальными условиями: $y(0) = 1,\ y(0) = -2$.

Решение. Поскольку данное ДУ второго порядка не содержит явно *x*, положим $y' = p(y)$, тогда $y'' = p'_y \cdot p$. Получим дифференциальное уравнение первого порядка с однородной правой частью (которое одновременно является и ДУ типа Бернулли с параметром $\alpha = -1$) относительно неизвестной функции $p(y)$:

$$ypp'_y = p^2 - y^2 \Leftrightarrow p'_y = \frac{p}{y} - \frac{y}{p}. \qquad (3)$$

Первый способ. Решим уравнение (3) как **ДУ с однородной правой частью**: Положим

$$u = \frac{p}{y} \Rightarrow p = y \cdot u \Rightarrow p'_y = u + y \cdot u'_y.$$

Подставив это в уравнение (3) получим ДУ с разделяющимися переменными:

$$u + y \cdot u'_y = u - \frac{1}{u} \Leftrightarrow y \cdot \frac{du}{dy} = -\frac{1}{u} \Rightarrow \int u\,du = -\int \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, получаем

$$\tfrac{1}{2}u^2 = C_1 - \ln|y| \Rightarrow \frac{p}{y} = u = \pm\sqrt{2C_1 - 2\ln|y|} \Rightarrow y' = p = \pm y\sqrt{2C_1 - 2\ln|y|}.$$

Подставив в последнее равенство начальные условия $y(0) = 1,\ y(0) = -2$, определим нужный знак и значение константы C_1: $-2 = \pm 1 \cdot \sqrt{2C_1 - 0} \Rightarrow C_1 = 2$, перед корнем должен стоять знак «минус», и тогда

$$\frac{dy}{dx} = y' = -y \cdot \sqrt{4 - 2\ln|y|}.$$

Последнее уравнение есть ДУ с разделяющимися переменными, решим его:

$\int \frac{dy}{y \cdot \sqrt{4 - 2\ln|y|}} = -\int dx \Rightarrow$. В левом интеграле сделаем замену $t = 4 - 2\ln|y| \Rightarrow dt = -2\frac{dy}{y}$, получим $\sqrt{4 - 2\ln|y|} = x + C_2$, подставим сюда начальное условие $x = 0,\ y = 1$, получим, $\sqrt{4-0} = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 2$, следовательно, частное решение (в неявной форме) имеет вид: $\sqrt{4 - 2\ln|y|} = x + 2$, откуда $4 - 2\ln|y| = (x+2)^2 \Rightarrow \ln|y| = 2 - \frac{1}{2}(x+2)^2 \Rightarrow y = \pm e^{2 - \frac{1}{2}(x+2)^2}$.

Подставляя сюда еще раз начальное условие выбираем знак «плюс».

Ответ: $y = e^{2 - \frac{1}{2}(x+2)^2}$.

Второй способ. Решим ДУ $p'_y = \frac{p}{y} - \frac{y}{p}$ как **ДУ типа Бернулли** с параметром $\alpha = -1$.

Умножим обе части этого ДУ на множитель $(1-\alpha)p^{-\alpha} = 2p$ и положим $z = p^{1-\alpha} = p^2$.

Тогда $z'_y = 2pp'_y$. Получим $2pp'_y = \frac{1}{y}2p^2 - 2y \Leftrightarrow z'_y = \frac{2}{y}z - 2y$. Решим это линейное ДУ:

$z = u(y) \cdot v(y)$, $u(y) = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln(y)} = y^2$, $v(y) = \int \frac{-2y}{y^2}dy = -2\ln|y| + C_1$, поэтому

$p^2 = z = u \cdot v = y^2(C_1 - 2\ln|y|) \Rightarrow y'_x = p = \pm\sqrt{C_1 - 2\ln|y|)}$.

Далее решение такое же, что и первым способом.

4) Порядок ДУ можно понизить, используя формулы

$$\left(y \cdot y'\right)' = (y')^2 + y \cdot y'',\ \left(y^n \cdot y'\right)' = ny^{n-1}(y')^2 + y^n \cdot y'',$$

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''y-(y')^2}{y^2}, \qquad (g(x)\cdot y')' = g'(x)\cdot y' + g(x)\cdot y'', \text{ и.т.д.}$$

Тогда, если в ДУ удалось представить левую и правую части в виде полных производных (по x) выражений $F(x,y,y')$ и $G(x,y,y')$, т.е. в виде

$$\frac{d}{dx}F(x,y,y') = \frac{d}{dx}G(x,y,y'),$$

то тогда $F(x,y,y') = G(x,y,y') + C_1$.

Пример 6: Найти общее решение ДУ второго порядка $y''y = (y')^2 + y^2\sin x$.

Решение. Это ДУ второго порядка содержит явно и x, и y, и y' и y''. Перепишем его в виде $\dfrac{y''y-(y')^2}{y^2} = \sin x$ и заметим что левая часть есть производная (по x) дроби $\dfrac{y'}{y}$, т.е. данное ДУ имеет вид $\left(\dfrac{y'}{y}\right)' = \sin x$. Следовательно, $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \int \sin x = C_1 - \cos x$, откуда $\int\dfrac{dy}{y} = \int (C_1-\cos x)dx \Rightarrow \ln|y| = C_1x - \sin x + \ln C_2 \Rightarrow y = C_2e^{C_1x-\sin x}$.

Ответ: $y = C_2e^{C_1x-\sin x}$.

2.3. Задачи для самостоятельного решения .

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
   (а) $y^{IV} = \dfrac{1}{x^2}$; (б) $yy'' + (y')^3 = (y')^2$; (в) $xy'' = y'\ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)$; (г) $xy'' + y' = x+1$;
   (д) $yy'' + (y')^2 = x$.
2. Найти частное решение дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям:
   (а) $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$; (б) $y'' = e^{2y}$, $y(1) = 0,\ y'(1) = 1$;
   (в) $2yy'' + y^2 = (y')^2$, $y(2) = y'(2) = 1$.

3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

3.1. Основные сведения

Линейное дифференциальное уравнение (ЛДУ) второго порядка имеет вид

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x),$$

где $a(x) \not\equiv 0$. Если $f(x) \equiv 0$, это ЛДУ называется ***однородным***, а если $f(x) \not\equiv 0$, то оно называется ***неоднородным***. Общее решение однородного ЛДУ (ОЛДУ) второго порядка

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

имеет вид

$$y_{oo} = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x),$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – два линейно независимых[4] частных решения этого уравнения, образующее его **фундаментальную систему решений** (**ФСР**). Общее решение неоднородного ЛДУ

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

имеет вид $y_{он} = y_{oo} + y_{чн}$., где

$y_{он}$ – общее решение неоднородного ЛДУ, $y_{чн}$ – какое-то частное решение неоднородного ЛДУ y_{oo} – общее решение соответствующего однородного ЛДУ.

3.1. Построение общего решения ОЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть дано ОЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (a \neq 0), \tag{4}$$

$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ – соответствующее ***характеристическое уравнение***, имеющее вещественные или комплексные корни λ_1, λ_2. Тогда общее решения ОЛДУ (4) имеет следующий вид (в зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$):

(а) если $D > 0$ и λ_1, λ_2 – различные вещественные корни, то

$$y_{oo} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$$

(б) если $D = 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha \in \mathbf{R}$, то

$$y_{oo} = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x};$$

(в) если $D < 0$ и корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексные, причем, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}^+$, i – мнимая единица ($i^2 = -1$), то

$$y_{oo} = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 x e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Пример 7. Найти общее решение ОЛДУ:

(а) $2y'' - y' - 3y = 0$; (б) $y'' - 6y' + 9y = 0$; (в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение. Составляем соответствующее характеристическое уравнение и находим корни.

(а) $2\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3/2 \Rightarrow y_{oo} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{3}{2}x}$;

(б) $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 3 \Rightarrow y_{oo} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$;

(в) $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, $\lambda = -1 \pm 2i \Rightarrow y_{oo} = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x$.

---

[4] функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называются ***линейно зависимыми*** на промежутке $(\alpha; \beta)$, если тождественное равенство $\lambda_1 \cdot y_1(x) + \ldots + \lambda_1 \cdot y_1(x) \equiv 0$ на $(\alpha; \beta)$ выполняется при некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, не равных одновременно нулю. В противном случае, т.е. если тождественное равенство $\lambda_1 \cdot y_1(x) + \ldots + \lambda_1 \cdot y_1(x) \equiv 0$ на $(\alpha; \beta)$ возможно только при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называются ***линейно независимыми*** на промежутке $(\alpha; \beta)$. **Две** функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы тогда и только когда, когда они не пропорциональны, т.е. $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq const$.

3.2. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных

Этот метод позволяет находить общее решение любого неоднородного линейного дифференциального уравнения (НЛДУ), если известна фундаментальная система решений соответствующего однородного линейного дифференциального уравнения (ОЛДУ). Рассмотрим подробно ЛДУ второго порядка.

Теорема . *Пусть для однородного ЛДУ второго порядка*

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$$

нам известно его общее решение:

$$y_{\text{оо}}=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x),$$

Тогда для неоднородного ЛДУ

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=f(x)$$

общее решение можно найти в виде

$$y_{\text{он}}=C_1(x)\cdot\varphi_1(x)+C_2(x)\cdot\varphi_2(x),$$

где производные $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ являются решениями системы двух линейных уравнений с расширенной матрицей:

$$\left(\begin{array}{cc|c}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & 0\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & f_0(x)\end{array}\right) \text{ и } f_0(x)=\frac{f(x)}{a(x)}.$$

Эта система всегда имеет единственное решение на любом промежутке, где непрерывны все коэффициенты ОЛДУ и $a(x)\neq 0$.

Пример 8 Найти общее решение дифференциального уравнения

$$4y''+y=\frac{8}{1+\cos x}. \qquad (5)$$

Решение. Напишем соответствующее однородное ЛДУ:

$4y''+y=0$, составим для него характеристическое уравнение $4\lambda^2+1=0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2}=\pm\frac{1}{2}i$. Общее решение для ОЛДУ имеет вид $y_{\text{оо}}=C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}$. Общее решение данного уравнения (5) будем искать в виде

$$y_{\text{он}}=C_1(x)\cos\frac{x}{2}+C_2(x)\sin\frac{x}{2}. \qquad (6)$$

В данном случае $\varphi_1(x)=\cos\frac{x}{2}, \varphi_2(x)=\sin\frac{x}{2}$.Производные функций $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ удовлетворяют системе линейных уравнений с расширенной матрицей:

$$\left(\begin{array}{cc|c}\cos\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2} & 0\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} & \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & \frac{2}{1+\cos x}\end{array}\right)$$

Решим эту систему по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2}\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} & \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2},\ \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & \sin\frac{x}{2}\\ \frac{2}{1+\cos x} & \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\end{vmatrix}=-\frac{2\sin\frac{x}{2}}{1+\cos x}=-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\frac{x}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} & \frac{2}{1+\cos x} \end{vmatrix} = \frac{2\cos\frac{x}{2}}{1+\cos x} = \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}.$$

Следовательно, $C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, $C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{\cos\frac{x}{2}}$.

Теперь, интегрируя, находим:

$$C_1(x) = \int \frac{2\sin\frac{x}{2}\,dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{4}{\cos\frac{x}{2}} + \overline{C}_1, \quad C_2(x) = \int \frac{2\,dx}{\cos\frac{x}{2}} = 4\ln\left|\frac{1+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| + \overline{C}_2, \tag{7}$$

где $\overline{C}_1, \overline{C}_2 = const$. Подставляя полученные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ (7) в (6) получим искомое общее решение неоднородного ЛДУ (5):

$$y_{\text{он}} = \left(\frac{4}{\cos\frac{x}{2}} + \overline{C}_1\right)\cos\frac{x}{2} + \left(4\ln\left|\frac{1+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| + \overline{C}_2\right)\sin\frac{x}{2} =$$

$$= \underbrace{\left(4 + 4\sin\frac{x}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right|\right)}_{y_{\text{чн}}-\text{частное реш. неодн. ЛДУ}} + \underbrace{\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}\right)}_{\substack{y_{\text{оо}}- \\ \text{общее реш. однор. ЛДУ}}}$$

(черту над настоящими константами уже можно опустить).

3.3. Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти **общее** решение дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:
   (а) $3y'' + y' - 4y = 0$; (б) $4y'' + 12y' + 9y = 0$; (в) $y'' - 5y' = 0$; (г) $y'' - 9y = 0$;
   (д) $y'' + 9y = 0$; (е) ; (ж) $y'' - 4y' + 13y = 0$;
2. Найти **частное** решение, удовлетворяющее начальным условиям:
   (а) $y'' + y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$;
   (б) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$;
   (в) $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Найти общее решение неоднородного ЛДУ второго порядка:

(а) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$; (б) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$; (в) $y'' + 9y = \frac{1}{\sin x}$,

4. Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Неоднородное линейное дифференциальное уравнение (НЛДУ) имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \tag{8}$$

или, символически,

$$\mathcal{L}[y] = f(x), \tag{8*}$$

Соответствующее однородное линейное дифференциальное уравнение (ОЛДУ) имеет вид

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{9}$$

или, символически, $\mathcal{L}[y]=0$

Структура общего решения однородного ЛДУ *n*-го порядка. *Общее решение ОЛДУ (9) с непрерывными коэффициентами имеет вид*

$$y_{\text{оо}} = C_1\cdot\varphi_1(x)+...+C_1\cdot\varphi_1(x),$$

где $\varphi_1(x),...,\varphi_1(x)$ *– линейно независимые частные решения этого ЛДУ, образующие* ***фундаментальную систему решений*** *этого ОЛДУ,* $C_1,...,C_n$ *– произвольные константы.*

4.1. Решение ОЛДУ *n*-го порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим ОЛДУ:

$$a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_n y=0, \tag{10}$$

где $a_i = const\in \mathbf{R}$, $a_0\neq 0$.

Многочлен

$$P(\lambda)\underset{def}{=} a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0 \tag{11}$$

называется ***характеристическим*** для ОЛДУ (3). Алгебраическое уравнение $P(\lambda)=0$ также называется характеристическим.

Построение фундаментальной системы решений для ОЛДУ с постоянными коэффициентами *n*-го порядка

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ – все корни (вещественные и/или комплексные) характеристического уравнения (4), а натуральные числа $r_1,r_2,...,r_k$ – соответствующие кратности этих корней. Это значит, что характеристический многочлен разлагается в произведение

$$P(\lambda)=a_0(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdot...\cdot(\lambda-\lambda_k)^{r_k},$$

и общее количество корней с учетом их кратностей равно порядку *n* ОЛДУ, т.е. $r_1+r_2+...+r_k=n$.

Заметим также, что все коэффициенты характеристического уравнения вещественны, и поэтому его комплексные корни попарно комплексно сопряжены, т.е. если имеется корень $\lambda=\alpha+i\beta$ кратности *r*, то имеется и корень $\lambda=\alpha-i\beta$ той же кратности *r*.

(1°) Каждому вещественному корню $\lambda_j=\gamma\in\mathbf{R}$ кратности *r* соответствуют ровно *r* различных функций, составляющих ФСР уравнения (10):

$$\varphi_1(x)=e^{\gamma x},\ \varphi_2(x)=x\cdot e^{\gamma x},...,\ \varphi_r(x)=x^{r-1}\cdot e^{\gamma x}$$

(2°) Каждой паре комплексно сопряженных корней $\lambda_j=\alpha\pm i\beta$, где $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}^+$, каждый из которых имеет кратность *r*, соответствуют *r* пар функций, составляющих ФСР уравнения (3) (а всего их $2r$):

$$\varphi_1(x)=e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\ \varphi_2(x)=x\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,...,\ \varphi_r(x)=x^{r-1}\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x;$$

$$\psi_1(x)=e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\ \psi_2(x)=x\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,...,\ \psi_r(x)=x^{r-1}\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x.$$

Полная фундаментальная система решений ОЛДУ (10) состоит из всех функций, построенных таким образом для всех корней характеристического уравнения.

Пример 9. Найти общие решения следующих ОЛДУ:
(а) $y''' - 8y = 0$; (б) $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0$; (в) $y^{(7)} - 16y^{(3)} = 0$.

Решение. Запишем для каждого ОЛДУ характеристический многочлен $P(\lambda)$ и разложим его на множители:

(а) $P(\lambda) = \lambda^3 - 8 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$, корни $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$, их кратности равны 1. Поэтому $y_{\text{оо}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}\cos\left(x\sqrt{3}\right) + C_2 e^{-x}\sin\left(x\sqrt{3}\right)$;

(б) $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3) = 0$, корни и их кратности: $\lambda_1 = -1, r_1 = 2$, $\lambda_2 = 3, r_2 = 1$, поэтому $y_{\text{оо}} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{3x}$.

(в) $P(\lambda) = \lambda^7 - 16\lambda^3 = \lambda^3(\lambda^4 - 16) = \lambda^3(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4)$, корни и их кратности: $\lambda_1 = 0, r_1 = 3; \lambda_2 = 2, r_2 = 1, \lambda_3 = -2, r_3 = 1,$ $\lambda_{4,5} = 0 \pm 2i$, $r_{4,5} = 1$, общее решение

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{0x} + C_1 x \cdot e^{0x} + C_1 x^2 \cdot e^{0x} + C_4 e^{2x} + C_5 e^{-2x} + C_6 e^{0x}\cos 2x + C_7 e^{0x}\sin 2x =$$
$$= C_1 + C_1 x + C_1 x^2 + C_4 e^{2x} + C_5 e^{-2x} + C_6 \cos 2x + C_7 \sin 2x.$$

Структура общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения.

Общее решение неоднородного ЛДУ

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \qquad (8)$$

есть сумма частного решения этого НЛДУ и общего решения соответствующего однородного ЛДУ

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (9)$$

Символически: $y_{\text{он}} = y_{\text{чн}} + y_{\text{оо}}$.

Теорема о наложении частных решений НЛДУ).

Пусть правая часть $f(x)$ неоднородного ЛДУ (1), т.е. $\mathcal{L}[y] = f(x)$, является суммой других функций

$$f(x) = f_1(x) + \ldots + f_m(x),$$

а для каждого $k = 1, \ldots, m$ функция $y_k(x)$ является частным решением неоднородного ЛДУ $\mathcal{L}[y] = f_k(x)$. Тогда функция $y_o(x) = y_1(x) + \ldots + y_m(x)$ является частным решением уравнения (8).

4.2. Метод неопределенных коэффициентов решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Мы умеем строить общее решение $y_{\text{оо}}(x)$ однородного ЛДУ с постоянными коэффициентами:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

Для этого надо составить характеристического уравнения

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

найти его корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ и определить их кратности $r_1, r_2, ..., r_k$ (натуральные числа, т.е. целые положительные).

Условимся считать, что если вещественное или комплексное число λ **не является** корнем данного характеристического уравнения, то мы все равно будем считать его **корнем кратности ноль**.

Для нахождения общего решения $y_{\text{он}}(x)$ неоднородного ЛДУ

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$

надо знать его какое-нибудь частное решение $y_{\text{чн}}(x)$, поскольку $y_{\text{он}} = y_{\text{чн}} + y_{\text{оо}}$.

Такое частное решение можно найти методом неопределенных коэффициентов в том случае, **если функция $f(x)$ имеет специальный вид первого или второго типа.**

Специальный вид правой части 1-го типа: $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$, где $\alpha \in \mathbf{R}$, $P_m(x)$ – многочлен степени m.

Пусть число α является корнем кратности r характеристического уравнения. В этом случае частное решение можно найти в виде:

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} \tilde{P}_m(x),$$

где $\tilde{P}(x)$ – многочлен степени m с неопределенными коэффициентами. Напомним, что многочлены степени 0, 1 и 2 с неопределенными коэффициентами имеют вид $A,\ Ax + B,\ Ax^2 + Bx + D$ соответственно ($A, B, D, ...$ – неопределенные коэффициенты, которые надо найти).

Чтобы найти эти коэффициенты, следует:

(1) найти первую, вторую и т.д. производные функции $y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} \tilde{P}_m(x)$;

(2) подставить их в данное НЛДУ $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = e^{\alpha x} P(x)$, привести подобные и сократить левую и правую части на $e^{\alpha x}$;

(3) Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной x слева и справа; получится система линейных уравнений (число этих уравнений будет равно $(m+1)$ – числу искомых неопределенных коэффициентов);

(4) Решить полученную систему уравнений.

Специальный вид правой части 2-го типа: $f(x) = e^{\alpha x} \cdot \left(P_m(x) \cos \beta x + Q_k(x) \sin \beta x \right)$, где $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}^+$, $P_m(x)$ **и** $Q_k(x)$ – многочлены степени m и k соответственно (один из этих многочленов может вовсе отсутствовать, т.е. быть нулевым). Нулевой многочлен будем считать имеющим степень минус один.

Пусть комплексные числа $\lambda = \alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности r и $N = \max\{m, k\}$. В этом случае частное решение можно найти в виде :

$$y_{\text{чн}} = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot \left(\tilde{P}_N(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_N(x) \sin \beta x \right).$$

Чтобы найти коэффициенты многочленов $\tilde{P}_N(x)$ и $\tilde{Q}_N(x)$, надо:

(1) найти первую, вторую и т.д. производные функции $y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} \tilde{P}_m(x)$;

(2) подставить их в данное НЛДУ

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = e^{\alpha x} \cdot \left(P_m(x) \cos \beta x + Q_k(x) \sin \beta x \right)$, привести подобные и сократить левую и правую части на $e^{\alpha x}$;

(3) Представить левую часть в виде в виде $A(x)\cos\beta x+B(x)\sin\beta x$, где $A(x)$ и $B(x)$ – многочлены, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа в многочленах при $\cos\beta x$ (т.е. в $A(x)$ и $P_m(x)$), а затем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа в многочленах при $\sin\beta x$, т.е. при $B(x)$ и $Q_k(x)$); получится система из $2(N+1)$ линейных уравнений;

(4) Решить полученную систему уравнений.

Замечание. Часто правая часть $f(x)$ не имеет специального вида, но является суммой нескольких функций $f(x)=f_1(x)+...+f_s(x)$, где каждая из функций $f_i(x)$ имеет специальный вид 1-го ил 2-го типа. В этом случае, по теореме 8, частное решение имеет вид $y_{\text{чн}}=y_1(x)+...+y_s(x)$, где $y_i(x)$ – частное решение для НЛДУ

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f_i(x).$$

Пример 10. Найти общее решение НЛДУ $y''-2y'-3y=(4x+8)e^{-x}+13\sin 2x.$

Решение. Для соответствующего однородного ЛДУ $y''-2y'-3y=0$ характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda-3=0$ имеет корни $\lambda_1=-1$ и $\lambda_2=3$ кратности $r=1$ каждый. Общее решение ОЛДУ есть $y_{\text{оо}}=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$. Правая часть есть сумма двух функций $f(x)=(x+2)e^{-x}+13\sin 2x=f_1(x)+f_2(x)$, имеющих специальный вид 1-го и 2-го типа соответственно. Частное решение есть сумма: $y_{\text{чн}}=y_1(x)+y_2(x)$, где

$y_1(x)$ – частное решение НЛДУ $y''-2y'-3y=f_1(x)=(4x+8)e^{-x}$, (12)

$y_2(x)$ – частное решение НЛДУ $y''-2y'-3y=f_2(x)=13\sin 2x$. (13)

(1) $f_1(x)=e^{\alpha x}P_m(x)=e^{-x}(x+2)$**,** $\alpha=-1$ **–** корень кратности 1, $m=1$, следовательно $y_1(x)=x^1e^{-x}\tilde{P}_1(x)=xe^{-x}(Ax+B)=e^{-x}(Ax^2+Bx)$.

Находим первую и вторую производные:

$$y_1'=-e^{-x}(Ax^2+Bx)+e^{-x}(2Ax+B)=e^{-x}(-Ax^2+(2A-B)x+B),$$

$$y_2''=-e^{-x}(-Ax^2+(2A-B)x+B)+e^{-x}(-2Ax+2A-B)=$$
$$=e^{-x}\left(Ax^2+(B-4A)x+(2A-2B)\right)$$

и подставим в уравнение (12), получим:

$$e^{-x}\left(Ax^2+(B-4A)x+(2A-2B)\right)-2e^{-x}\left(-Ax^2+(2A-B)x+B\right)-3e^{-x}(Ax^2+Bx)=(4x+8)e^{-x}$$

Сократим на e^{-x}, приведем слева подобные:

$0x^2-8Ax+(2A-4B)=x+2$ и приравняем коэффициенты при x^1 и x^0 слева и справа,

получим систему: $\begin{cases}-8A=4\\2A-4B=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{2},\\B=-\frac{9}{4}.\end{cases}$

Итак, $y_1(x)=\left(-\frac{1}{2}x-\frac{9}{4}\right)e^{-x}$.

(2) $f_2(x)=e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x+Q_k(x)\sin\beta x\right)=3\sin 2x$, $\alpha=0, \beta=2,$ $\lambda=0\pm 2i$ – корень кратности $r=0$, $P_m(x)=0, Q_k(x)=3$, $m=-1, k=0\Rightarrow N=0$, поэтому

$$y_2(x)=x^0e^{0x}\left(\tilde{P}_0(x)\cos 2x+\tilde{Q}_0(x)\sin 2x\right)=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Находим первую и вторую производные:

$$y_2{}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \quad y_2{}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

и подставим в уравнение (13), получим:

$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) - 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) - 3(A\cos 2x + B\sin 2x) = 13\sin 2x$.

приравняем слева и справа коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, получим систему уравнений:

$\begin{cases} -7A - 4B = 0 \\ 4A - 7B = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{5} \\ B = -\frac{7}{5} \end{cases}$, поэтому $y_2(x) = \frac{4}{5}\cos 2x - \frac{7}{5}\sin 2x$.

Окончательно получаем:

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = y_{\text{оо}} + y_1 + y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + y_1(x) - \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{9}{4}\right)e^{-x} + \tfrac{4}{5}\cos 2x - \tfrac{7}{5}\sin 2x.$$

Пример 11. Не находя неопределенных коэффициентов, указать вид общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$y^{\mathrm{IV}} - 5y'' - 36y = 3\sin 2x + xe^{3x} + x^2 e^{-2x}.$$

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного линейного ДУ $y^{\mathrm{IV}} - 5y'' - 36y = 0$, для чего найдем корни характеристического уравнения:

$$\lambda^4 - 5\lambda^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 9)(\lambda^2 + 4) = 0,\ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \lambda_{3,4} = \pm 2i.$$

Следовательно, общее решение есть $y_{\text{оо}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3\cos 2x + C_4 \sin 2x$.

Правая часть исходного неоднородного ЛДУ есть сумма трех функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, где $f_1(x) = 3\sin 2x,\ f_2(x) = xe^{3x},\ f_3(x) = x^2 e^{-2x}$. Поэтому общее решение неоднородного ЛДУ имеет вид $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$, где $y_{\text{чн}} = y_1 + y_2 + y_3$ и $y_i(x)$ – частное решение неоднородного ЛДУ $y^{\mathrm{IV}} - 5y'' - 36y = f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$.

1) для неоднородного ЛДУ $y^{\mathrm{IV}} - 5y'' - 36y = f_1(x) = 3\sin 2x$ частное решение есть: $y_1 = x(A_1\cos 2x + B_1 \sin 2x)$;
2) для неоднородного ЛДУ $y^{\mathrm{IV}} - 5y'' - 36y = f_2(x) = xe^{3x}$ частное решение есть: $y_2 = x(A_2 x + B_2)e^{3x}$;
3) для неоднородного ЛДУ $y^{\mathrm{IV}} - 5y'' - 36y = f_3(x) = x^2 e^{-2x}$ частное решение есть: $y_3 = (A_3 x^2 + B_3 x + D_2)e^{-2x}$.

Поэтому для всего исходного нелинейного ЛДУ общее решение имеет вид

$$+y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_1 + y_2 + y_3 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x +$$
$$+ x(A_1 \cos 2x + B_1 \sin 2x) + x(A_2 x + B_2)e^{3x} + (A_3 x^2 + B_3 x + D_2)e^{-2x}.$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные (которые всегда присутствуют в общем решении дифференциального уравнения), $A_i, B_i\ (i = 1, 2, 3)$ и D_2 – конкретные числовые постоянные, которые, в принципе, можно найти (методом неопределенных коэффициентов), но в данной задаче это не требуется.

4.3. Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти общие решения однородных линейных дифференциальных уравнений:

(а) $y''' - 3y' - 2y = 0$; (б) $27y''' + 8y = 0$; (в) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$;

(г) $y^{IV} - 2y'' + y = 0$; (д) $y^{IV} + 8y'' + 16 = 0$; (е) $y^{IV} - 2y''' - 3y'' = 0$.

2. Найти общие решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений методом неопределенных коэффициентов:

(а) $y'' - 4y' + 3y = xe^{3x}$; (б) $y'' + 4y = x\sin x$;

(в) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin x$; (г) $y'' - 2y' + 10y = \cos 3x$.

3. Найти вид общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения (сами коэффициенты не находить!):

(а) $y''' - 3y'' + y' - 3y = x^2 e^{3x} + x^2 - 5x + 3\cos x$;

(б) $y^{IV} + 5y'' + 4y = x\sin 2x + e^{-x}\cos x + (x-2)e^{-x}$;

(в) $y^{V} - 8y'' = xe^{2x} - x^2 e^{-x} + x^2 - 5x + 3 + 2\cos x$;

(г) $y^{IV} + 2y'' - 8y' + 5y = xe^{x} + x^2 e^{-x} + 3\cos 2x$.

Контрольные вопросы

1. Что такое дифференциальное уравнение?
2. Что такое порядок дифференциального уравнения?
3. Сколько произвольных констант имеет общее решение дифференциального уравнения: (а) первого порядка; (б) второго порядка; (в) n-го порядка?
4. Как выглядит начальное условие (начальные условия) для дифференциального уравнения: (а) первого порядка; (б) второго порядка; (в) n-го порядка?
5. Что такое задача Коши для дифференциального уравнения: (а) первого порядка; (б) второго порядка?
6. Что такое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, и как его решать?
7. Что такое дифференциальное уравнение с однородной правой частью и как его решать?
8. Как выглядит линейное дифференциальное уравнение первого порядка, и какие способы его решения вы знаете?
9. Как выглядит дифференциальное уравнение типа Бернулли, и какие способы его решения вы знаете?

10. Что такое дифференциальное уравнение в полных дифференциалах, и как его решать?
11. В каких случаях можно понизить порядок дифференциального уравнения второго порядка? Как это сделать?
12. Как выглядит линейное дифференциальное уравнение n-го порядка:
(а) однородное; (б) неоднородное?
13. Какими свойствами обладают частные решения однородного линейного дифференциального уравнения?
14. Что такое фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения?
15. Какова структура общего решения однородного линейного дифференциального уравнения?
16. Как находить фундаментальную систему решений однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами: (а) второго порядка (б) n-го порядка?
17. Какова структура общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения?
18. В чем состоит принцип наложения частных решений для неоднородного линейного дифференциального уравнения?
19. В чем суть метода Лагранжа решения неоднородного линейного дифференциального уравнения? Почему этот метод также называется методом вариации постоянных?
20. Какие неоднородные линейные дифференциальные уравнения можно решать методом неопределенных коэффициентов. В каком виде следует искать частное решение? Как находить неопределенные коэффициенты?

Литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 2. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 544 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Дрофа, 2003. – 512 с.
3. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 352 с. (Сер. Математика в техническом университете, вып. VIII).
4. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа: Учеб. пособие для втузов / Под ред. А.В. Ефремова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 368 с.
5. Богомолов В.Г., Кандаурова И.Е., Шишкина С.И. Дифференциальные уравнения первого порядка. – М.: Изд-во МГТУ, 2001. – 37 с.
6. Пелевина И.Н., Раров Н.Н., Филиновский А.В. Дифференциальные уравнения высших порядков. Методические указания для выполнения домашнего задания. – М.: Изд-во МГТУ, 2001. – 38 с..

Содержание